6/4

4. El sistema electrónico de dirección de un cohete funciona correctamente con una probabilidad p cuando se pone a funcionar. Se quiere instalar n sistemas de respaldo independientes, pero idénticas, en el cohete de modo que la probabilidad de que al menos un sistema trabaje en forma correcta no sea menor que 0,99. Hallar la cantidad n de sistemas electrónicos de dirección que se necesitan para satisfacer los requerimientos si $p = 0{,}9$ y si $p = 0{,}8$.

$$\underbrace{0{,}99 \leq f(1)}_{\text{mal}}$$

$$0{,}99 \leq f(1) + f(2) + \cdots + f(n)$$

o equivalentemente

$$0{,}99 \leq f(\{0\}^c) = 1 - f(0) = 1 - \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n$$

$$0{,}99 \leq 1 - (1-p)^n$$

Ejercicio 8 (Distribución Poisson)
En los siguientes ejercicios se asume que los fenómenos se comportan según la *distribución de Poisson*, dada por:

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow p_X(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (\lambda > 0)$$

Típicamente, la distribución Poisson expresa, a partir de una frecuencia de ocurrencia media (λ), la probabilidad de que ocurra un determinado número de eventos durante cierto período de tiempo.

1. Verificar que $p_X : \mathbb{N} \to [0, 1]$ define una probabilidad.

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Rightarrow R_{ec}(X) = \mathbb{N}$

p_X es una función de distribución puntual si

$$\sum_{K \in R_{ec}(X)} p_X(K) = 1$$

$$\sum_{K=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda} \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\lambda^K}{K!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

Desarrollo de Taylor de e^{λ}

Derivada K-ésima

$$e^{\lambda} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{(e^{\lambda x})^{(K)}(0)}{K!} = \sum_{K=0}^{+\infty} \frac{\lambda^K e^{\lambda x}(0)}{K!}$$

1

2. El número promedio de partículas radiactivas que pasan a través de un contador durante un milisegundo en un experimento de laboratorio es 4. ¿Cuál es la probabilidad de que entren 6 partículas al contador en un milisegundo determinado?

$\lambda = 4$

$X \sim P(4)$

$$p_X(6) = e^{-4}\frac{4^6}{6!}$$

4. Se certifica la calidad de discos de computadora pasándolos por un certificador que cuenta el número de sectores defectuosos. Una determinada marca de discos tiene un promedio de 0,1 sectores defectuosos por disco. Calcular la probabilidad de que:

a) un disco que se inspeccione no tenga sectores defectuosos.

b) un disco que se inspeccione tenga más de un sector defectuoso.

c) dos discos que se inspeccionen no tengan sectores defectuosos.

$\lambda = \frac{1}{10}$, $X \sim P(\lambda)$

a) $$p_X(0) = e^{-\frac{1}{10}}\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{1}{10}}$$

b) $$1 - \left[p_X(0) + p_X(1)\right] = 1 - e^{-\frac{1}{10}} - e^{-\frac{1}{10}}\frac{1}{10}$$

$$= 1 - e^{-\frac{1}{10}}\left[1 + \frac{1}{10}\right]$$

$$= 1 - \frac{11}{10}e^{-\frac{1}{10}}$$

c) Calcular la probabilidad de que dos discos no tengan sectores defectuosos:

$A_i = \{$ "El disco i no tiene sectores defectuosos" $\}$

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

↪ Si A_1 y A_2 son independientes.

Por parte (a), calculamos $P(A_i) = p_X(0)$

Ejercicio 9 (Distribución geométrica)
Se considera $0 < p < 1$ y $R_X = \{1, 2, 3, \dots\}$ los enteros positivos.

1. Probar que $p_X : R_X \to [0,1]$ dada por $p_X(k) = (1-p)^{k-1}\, p$ es una función de probabilidad. Si una variable aleatoria discreta X tiene función de probabilidad p_X como antes se dice que X tiene *distribución Geométrica* de parámetro p y se denota $X \sim \text{Geo}(p)$.

$X \sim \text{Geo}(p)$: Repetimos un experimento de Bernoulli (de ~~para~~ parámetro p) de forma independiente hasta obtener el primer exito.

Cantidad de intentos hasta el primer exito.

$$p_X(k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

Si $X \sim \text{Geo}(p) \Rightarrow R_{ec}(X) = \{1, 2, 3, \dots\}$

p_X es una f.d.p si $\displaystyle\sum_{k \in R_{ec}(X)} p_X(k) = 1$

$j = k-1$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1-p)^{k-1} p = \sum_{j=0}^{+\infty} (1-p)^{j} p = \frac{p}{1-(1-p)} = \frac{p}{1-1+p} = \frac{p}{p} = 1$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} a r^{j} = \frac{a}{1-r} \quad \text{si } 0 < r < 1$$

$a \in \mathbb{R}$, Serie geométrica

3. *Pérdida de memoria:* Probar que $\forall m, n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$\boxed{\mathbf{P}(X > m+n | X > m) = \mathbf{P}(X > n).}$$

→ Es decir, si en el paso m no tuvimos éxito, es como que empezáramos nuevamente.

$$P(\{X > m+n\} \mid \{X > m\}) = P(\{X > n\})$$

m intentos n intentos

Queremos

$$P(\{X>m+n\}|\{X>m\}) = \frac{P(\{X>m+n\} \cap \{X>m\})}{P(\{X>m\})} = P(\{X>n\})$$

$$P(\{X>m\}) = 1 - P(\{X \leq m\})$$

$$\{X>m+n\} \cap \{X>m\} = \{X>m+n\}$$

$$P(\{X>m\}) = 1 - \sum_{K=1}^{m} p_X(K)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{m} (1-p)^{k-1} p$$

$$= 1 - \sum_{j=0}^{m} (1-p)^{j} p$$

$$= 1 - p\,\frac{(1-(1-p)^m)}{1-(1-p)}$$

Recordar:

$$\sum_{j=0}^{\ell} ar^j = a\,\frac{1-r^{\ell}}{1-r}$$

$$= 1 - \frac{\cancel{p}\,(1-(1-p)^n)}{\cancel{1} - \cancel{1} + \cancel{p}}$$

$$= 1 - (1-(1-p)^n)$$

$$= \cancel{1} - \cancel{1} + (1-p)^n$$

$$= (1-p)^n$$

$P(\{X > m\})$

$\parallel$

$(1-p)^m$

$$P(\{X > m+n\}) = (1-p)^{m+n}$$

$$P(\{X > m+n\} \mid \{X > m\}) = \frac{P(\{X>m+n\} \cap \{X > m\})}{P(\{X>m\})}$$

$$= \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^m}$$

$$= (1-p)^n$$

$$= P(\{X > n\})$$