7/3

- Ω espacio muestral

Ej: Tirar una moneda.

Resultados $\{C, N\}$

Sale número
$P(N) = 1/2$

$\Omega = \{C, N, \underbrace{\{C, N\}}, \phi\}$

Sale cara
$P(C) = \frac{1}{2}$

Sale cara o sale número
$P(\{C, N\}) = 1$

Lo podemos pensar como que si tiramos una moneda "muchas" veces, entonces aprox. la mitad de las veces sale cara, esto no quita la posibilidad de que en un experimento salga mil veces seguidas cara.

- $P : \Omega \to [0, 1] \subset \mathbb{R}$ es una función tal que

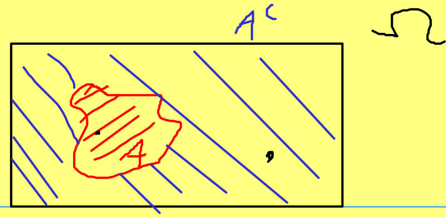
i). $P(\Omega) = 1$
ii). $P(A) \geq 0 \quad \forall A \subset \Omega$
iii). Si $A \cap B = \phi$, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Se deduce: $P(A^c) = 1 - P(A)$

Dem: $A^c \cap A = \phi \to P(A^c \cup A) = P(A) + P(A^c)$

$A \subset \Omega \Rightarrow A^c = \Omega \setminus A$
$\Rightarrow A \cup A^c = \Omega$

$1 \overset{(i)}{=} P(\Omega) = P(A^c \cup A) \overset{(iii)}{=} P(A) + P(A^c)$



3. En una fábrica los productos se codifican con 3 letras distintas que indican 3 operaciones que sufren cada uno de los productos y 3 cifras distintas y en ese orden: primero las letras y después los números. Las letras utilizadas son A, B, C y D.

   (a) ¿Cuántos productos pueden codificarse?

   (b) ¿Cuántos códigos empiezan con A y terminan con 9?

   (c) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos y en ese orden?

   (d) ¿En cuántos los números 0 y 2 aparecen juntos?

   (e) ¿En cuántos productos aparecen dos números pares juntos y el otro es impar?

$L_1 L_2 L_3 N_1 N_2 N_3$

$L_i \in \{A, B, C, D\}$

$L_1 \neq L_2$

$L_2 \neq L_3$

$L_1 \neq L_3$

$\# L_1 = 4$ $\qquad$ $\# N_1 = 10$

$\# L_2 = 3$ $\qquad$ $\# N_2 = 9$

$\# L_3 = 2$ $\qquad$ $\# N_3 = 8$

$N_i = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

$N_1 \neq N_2$

$N_2 \neq N_3$

$N_1 \neq N_3$

La cantidad de posibilidades es:

$A_4^3 \longleftarrow 4 \times 3 \times 2 \times 10 \times 9 \times 8$ $\qquad A_{10}^3$ $\longrightarrow$ Importa el orden

Repaso: Arreglos: Nos dice la cantidad de posibilidades de ordenar (o de elegir) K elementos de un conjunto de n elementos.

$$A_K^n = \frac{n!}{(n-K)!}$$

Obs: Importa el orden.

$\cdot\ L_1 L_2 L_3 \quad L_i \in \{A, B, C, D\} \Big\} \begin{matrix} K=3 \\ n=4 \end{matrix} \to A_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = 4! = 4\times3\times2$

$\cdot\ N_1\ N_2\ N_3 \quad N_i \in \{0, \dots, 9\} \Big\} \begin{matrix} K=3 \\ n=10 \end{matrix} \longrightarrow A_3^{10} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10\times9\times8\times\cancel{\frac{7!}{7!}}^{1}$

b) $A\ L_1\ L_2\ N_1\ N_2\ 9$

$\left.\begin{matrix} L_1 \in \{B, C, D\} \\ L_2 \in \{B, C, D\} \setminus L_1 \end{matrix}\right\} 3\times2 = A_2^3$

$\left.\begin{matrix} \#N_1 = 9 \\ \#N_2 = 8 \end{matrix}\right\} 9\times8 = A_2^9$

Total de posibilidades $3\times2\times9\times8$

. En total serán $\cancel{4}\times3\times2\times\cancel{10}\times9\times8 = 3\times2\times9\times8$

c) $ABC\ 1\ 0\ 2 \to L_1\ L_2\ L_3\ N_1\ \overset{2}{0}\ \overset{0}{2}$

$ABC\ 0\ 2\ 1 \to L_1\ L_2\ L_3\ \overset{2}{0}\ \overset{0}{2}\ N_3$

$\underline{L_1 L_2 L_3 N_1\ 0\ 2}$: $A_3^4 \times A_1^8 = 4!\times8$

$\underline{L_1 L_2 L_3\ 0\ 2\ N_3}$: $A_3^4 \times A_1^8 = 4!\times8$

Total son $4!\times16$

d) En total son $4!\times32$.

$P_i \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$

$I \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$

e) $ABC\ 0\ 2\ 1 \to L_1 L_2 L_3 P_1 P_2 I$

$ABC\ 1\ 2\ 0 \to L_1 L_2 L_3 I P_1 P_2$

$\underline{L_1 L_2 L_3 P_1 P_2 I}$: $\underbrace{A^4_3}_{4!} \times \underbrace{A^5_2}_{5 \times 4} \times \underbrace{A^5_1}_{5} = 5 \times 4 \times 5 \times 4!$

Total son $\quad 2 \times 5 \times 4 \times 5 \times 4! = 200 \times 4!$

6. * Usted va a la panadería a comprar una $\overbrace{\text{docena}}^{12}$ de bizcochos. En la panadería sólo quedan croissants, margaritas y galletas en cantidades suficientes.

(a) ¿Cuántas elecciones distintas puede hacer?

(b) Usted llega a la facultad con α croissants, β margaritas y γ galletas ($\alpha + \beta + \gamma = 12$) y los reparte entre usted y 11 amigos. ¿de cuántas formas los puede repartir? (Calcular en función de α, β y γ). ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que dicha cantidad sea máxima? (Sugerencia: ver como varía dicha cantidad al variar en una unidad alguno de los parámetros)

a) $B_1 B_2 \ldots B_{11} B_{12} \,||\,, \quad B_i \in \{C, M, G\}$

- El orden no importa.
- Es con repetición $\to$ Puedo llevar el mismo biscocho muchas veces.

$\underbrace{B_1}_{C} \mid \overbrace{B_2 \ldots B_6}^{M} \mid \underbrace{B_7 \ldots B_{12}}_{G} \to C^{14}_{2} = \dfrac{14!}{(14-2)!\,2!} = \dbinom{14}{2}$

b) $\left.\begin{array}{l} \alpha \to C \\ \beta \to M \\ \gamma \to G \end{array}\right\}$ $\dbinom{12}{\alpha} \cdot \dbinom{12-\alpha}{\beta} \cdot \dbinom{12-\alpha-\beta}{\gamma}$

$= \dfrac{12!}{\cancel{(12-\alpha)!}\,\alpha!} \cdot \dfrac{\cancel{(12-\alpha)!}}{\cancel{(12-\alpha-\beta)!}\,\beta!} \cdot \dfrac{\cancel{(12-\alpha-\beta)!}}{\underbrace{\boxed{(12-\alpha-\beta-\gamma)!}}_{0!=1}\,\gamma!}$

- $\alpha+\beta+\gamma = 12$

Total: $\dfrac{12!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$

- ¿Cuánto deben valer α, β y γ para que $\dfrac{12!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!}$ sea máx?

Buscamos α, β y γ tales que $\alpha!\,\beta!\,\gamma!$ sea mínimo

- $(\alpha-1)!\,(\beta+1)!\,\gamma! = (\alpha-1)!\,\beta!\,\gamma!\,.(\beta+1) > \alpha!\,\beta!\,\gamma!$

Si $\beta+1 > \alpha$

$\alpha+\beta+\gamma = 12$

$\beta+1 = 13-\alpha-\gamma > \alpha$

¿Será?

12. Un sistema de canalización de agua tiene 4 compuertas, dispuestas como en la figura. Cada compuerta se abre y cierra al azar, dejando pasar agua (si está abierta) o impidiéndolo. Supongamos las probabilidades siguientes:

$\mathbb{P}\,(\text{I abierta}) = \mathbb{P}\,(\text{II abierta}) = \mathbb{P}\,(\text{IV abierta}) = 0,55,$
$\mathbb{P}\,(\text{III abierta}) = 0,36,$
$\mathbb{P}\,(\text{I cerrada, II abierta}) = \mathbb{P}\,(\text{I abierta, IV cerrada}) = \mathbb{P}\,(\text{I cerrada, III abierta}) = 0,2.$

$\mathbb{P}\,(\text{II abierta, IV abierta}) = 0,35,$
$\mathbb{P}\,(\text{III abierta, IV cerrada}) = 0,26.$
$\mathbb{P}\,(\text{II abierta, III abierta}) = 0$
$\mathbb{P}\,(\text{I o II o IV abierta}) = 0,85,$
$\mathbb{P}\,(\text{I o III o IV abierta}) = 0,87.$

Calcular la probabilidad de que un torrente de agua lanzado en el punto Y llegue a Z. Se sugiere utilizar el ejercicio anterior.