UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY
FACULTAD DE INGENIERIA
IIMPI
INSTITUTO DE INGENIERIA MECANICA Y PRODUCCION INDUSTRIAL

Localización espacial

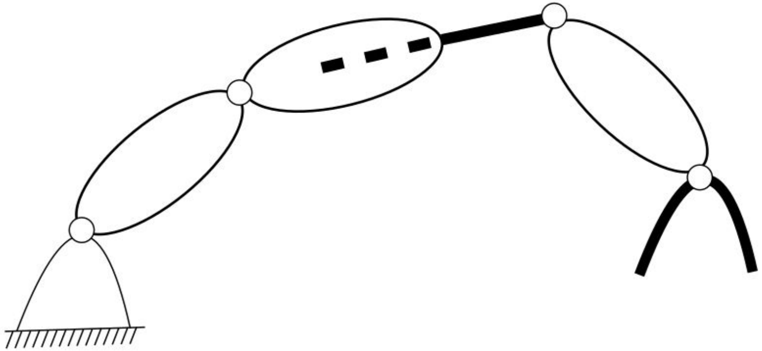
Fundamentos de Robótica Industrial

Versión 2024

Introducción

Estudiaremos manipuladores

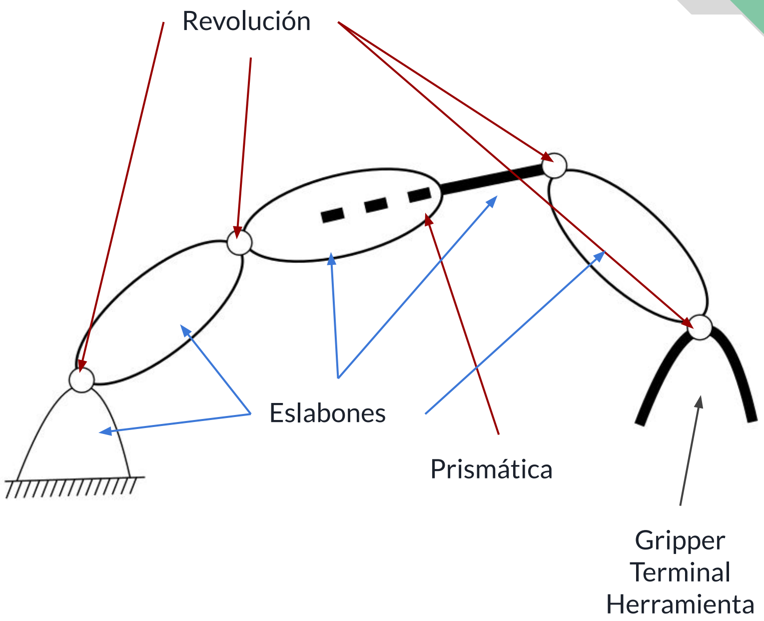
- **¿Qué entendemos por manipulador?**
- **¿Cuál es el objetivo de tener un manipulador?**
- **¿Cómo se obtiene?**



Introducción

Estudiaremos manipuladores

- **¿Qué entendemos por manipulador?**
  - Un manipulador puede ser representado como una cadena cinemática de **cuerpos rígidos** (eslabones) conectados por juntas (articulaciones).
  - Las articulaciones serán **prismáticas** o de **revolución**.
  - Un extremo es su base (fija) y el otro es una herramienta

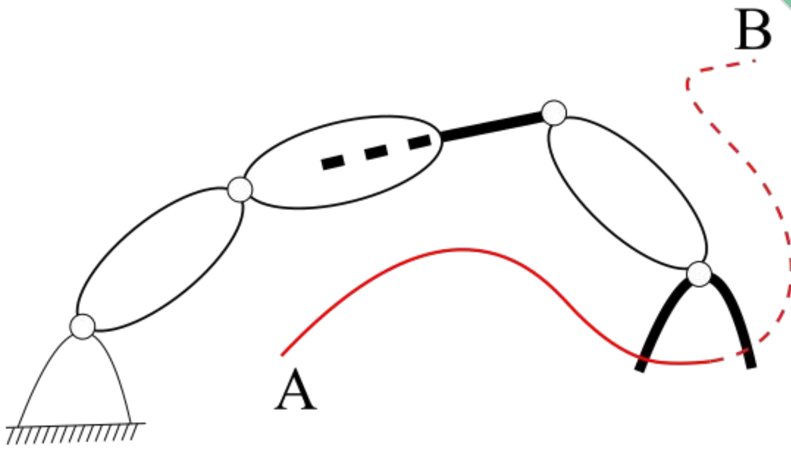


- **¿Cuál es el objetivo de tener un manipulador?**
- **¿Cómo se obtiene?**

Introducción

Estudiaremos manipuladores

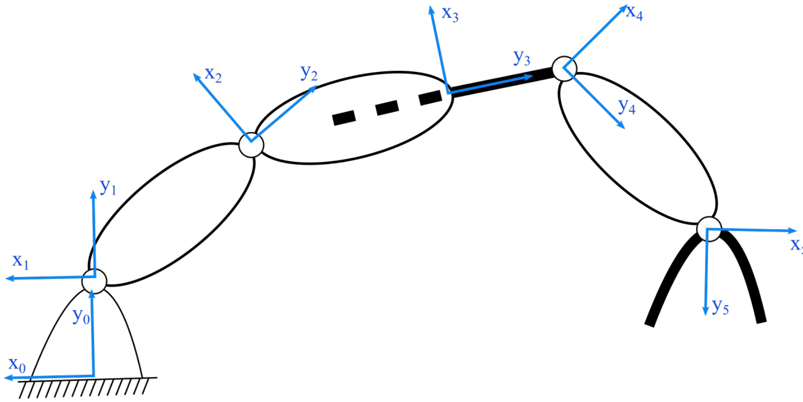
- **¿Qué entendemos por manipulador?**
- **¿Cuál es el objetivo de tener un manipulador?**
  - Generar un movimiento desde A hasta B por cualquier motivo
  - El movimiento se obtiene por la composición de los movimientos de cada eslabón respecto a su eslabón previo
  - Para manipular un objeto en el espacio será necesario describir la **posición** y **orientación** de su herramienta
- **¿Cómo se obtiene?**



Introducción

Estudiaremos manipuladores

- **¿Qué entendemos por manipulador?**
- **¿Cuál es el objetivo de tener un manipulador?**
- **¿Cómo se obtiene?**
  - Para definir posición y orientación se debe designar una **referencia**
  - Los **Sistemas de referencia** se definen solidarios a cada eslabón
  - Describir la posición de cada eslabón consecutivamente en función de las **variables de junta**.



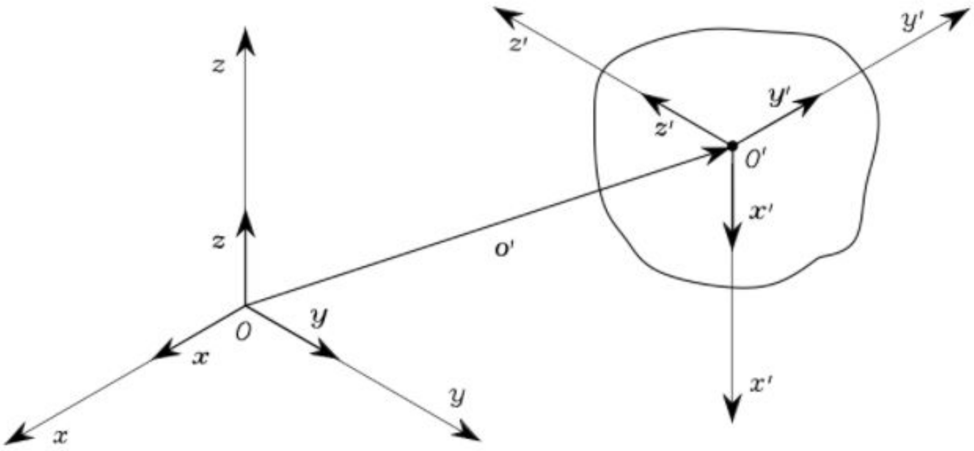
- Concatenar las posiciones para definir la posición de la herramienta con respecto a un referencial estático (**cinemática directa**)
- Se define también el concepto de **espacio de trabajo** y **espacio de juntas**

Posición de un cuerpo rígido

En Mecánica, se considera un **cuerpo rígido** a un sistema de partículas tal que las distancias entre ellas no varían.
Por lo tanto, un cuerpo rígido es aquel objeto o sistema que no sufre deformaciones por efecto de fuerzas externas, es decir, un sistema con partículas cuyas posiciones relativas no cambian.

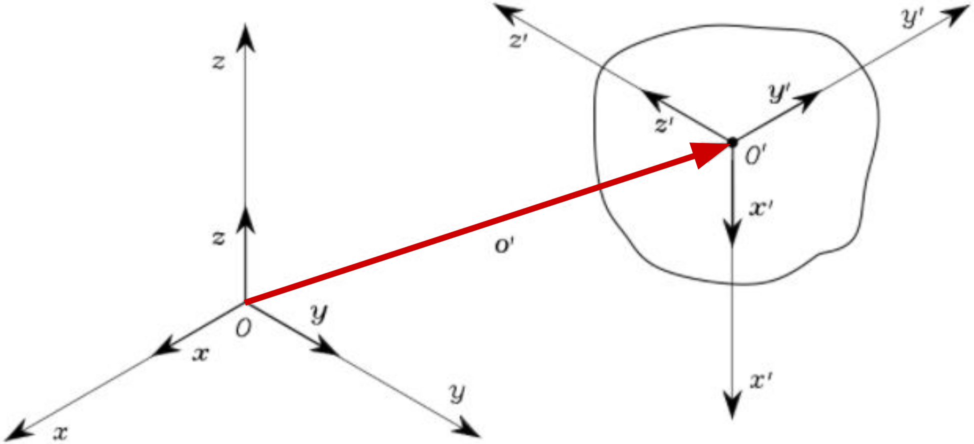
Posición de un cuerpo rígido

En Mecánica, se considera un **cuerpo rígido** a un sistema de partículas tal que las distancias entre ellas no varían.
Por lo tanto, un cuerpo rígido es aquel objeto o sistema que no sufre deformaciones por efecto de fuerzas externas, es decir, un sistema con partículas cuyas posiciones relativas no cambian.



Posición de un cuerpo rígido

En Mecánica, se considera un **cuerpo rígido** a un sistema de partículas tal que las distancias entre ellas no varían.
Por lo tanto, un cuerpo rígido es aquel objeto o sistema que no sufre deformaciones por efecto de fuerzas externas, es decir, un sistema con partículas cuyas posiciones relativas no cambian.

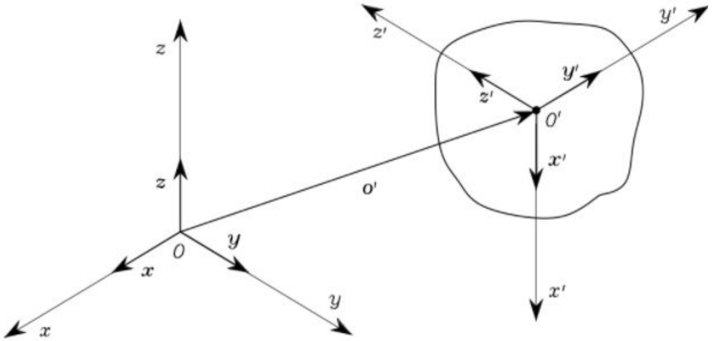


$$\boldsymbol{o}' = o'_x\boldsymbol{x} + o'_y\boldsymbol{y} + o'_z\boldsymbol{z}$$

$$\boldsymbol{o}' = \begin{bmatrix} o'_x \\ o'_y \\ o'_z \end{bmatrix}$$

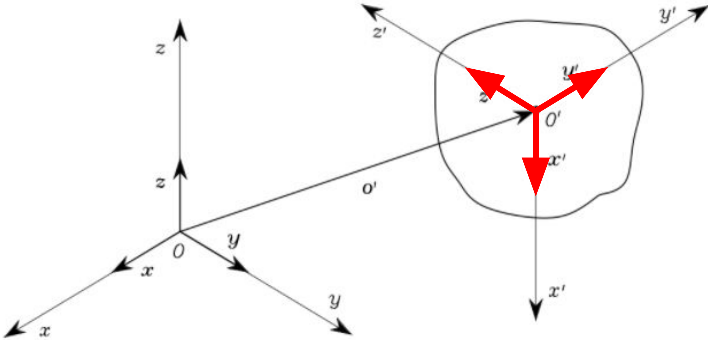
Orientación de un cuerpo rígido

Consideremos ahora un sistema de referencia *x'y'z'* solidario al cuerpo rígido cuyos vectores directores son **unitarios** y pueden escribirse en la base *xyz*.

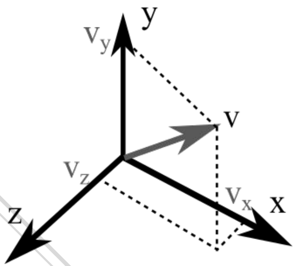


Orientación de un cuerpo rígido

Consideremos ahora un sistema de referencia *x'y'z'* solidario al cuerpo rígido cuyos vectores directores son **unitarios** y pueden escribirse en la base *xyz*.



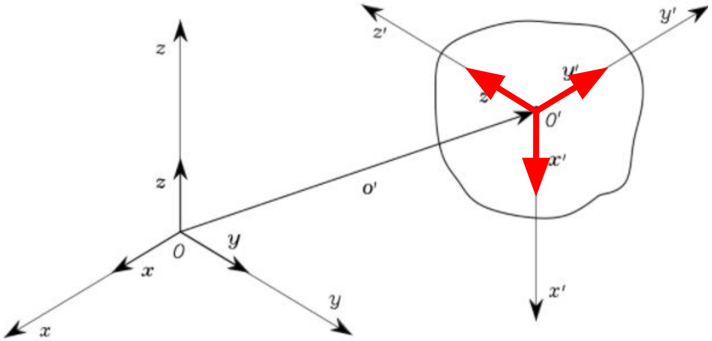
$$\boldsymbol{x}' = x'_x\boldsymbol{x} + x'_y\boldsymbol{y} + x'_z\boldsymbol{z}$$
$$\boldsymbol{y}' = y'_x\boldsymbol{x} + y'_y\boldsymbol{y} + y'_z\boldsymbol{z}$$
$$\boldsymbol{z}' = z'_x\boldsymbol{x} + z'_y\boldsymbol{y} + z'_z\boldsymbol{z}.$$



$\mathbf{v} = v_x.\mathbf{x} + v_y.\mathbf{y} + v_z.\mathbf{z}$

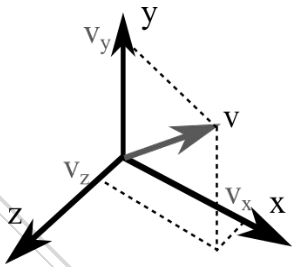
Orientación de un cuerpo rígido

Consideremos ahora un sistema de referencia *x'y'z'* solidario al cuerpo rígido cuyos vectores directores son **unitarios** y pueden escribirse en la base *xyz*.



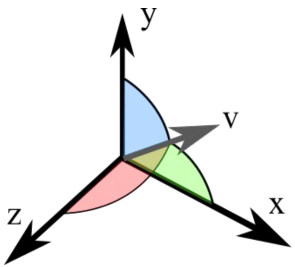
$$\boldsymbol{x}' = x'_x\boldsymbol{x} + x'_y\boldsymbol{y} + x'_z\boldsymbol{z}$$
$$\boldsymbol{y}' = y'_x\boldsymbol{x} + y'_y\boldsymbol{y} + y'_z\boldsymbol{z}$$
$$\boldsymbol{z}' = z'_x\boldsymbol{x} + z'_y\boldsymbol{y} + z'_z\boldsymbol{z}.$$

Las componentes de cada vector unitario corresponden a los cosenos directores de los ejes del sistema *x´y´z´* con los ejes de referencia *x y z*



$\mathbf{v} = v_x.\mathbf{x} + v_y.\mathbf{y} + v_z.\mathbf{z}$

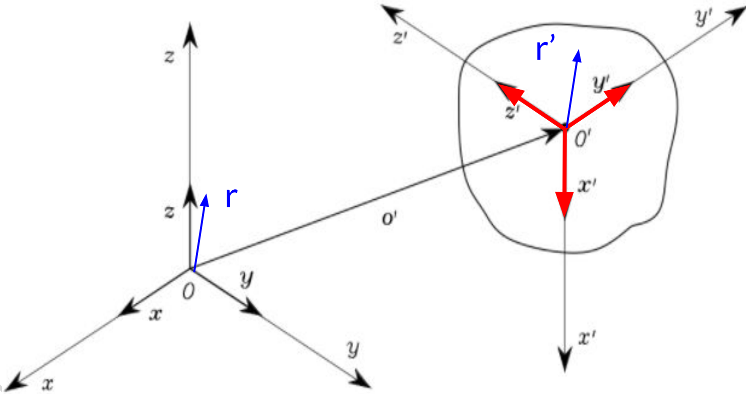
$\mathbf{v} = |\mathbf{v}|\cos(a_x).\mathbf{x} + |\mathbf{v}|\cos(a_y).\mathbf{y} + |\mathbf{v}|\cos(a_z).\mathbf{z}$



Matriz de Rotación

En álgebra lineal, una **matriz de rotación** es la matriz que representa una rotación en el espacio euclídeo.

Para el caso del cuerpo rígido genérico anterior, la **matriz de rotación** es la que resulta de colgar las componentes de los vectores de la base ***x'y'z'*** escritos en la base ***xyz***.



$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}' & \boldsymbol{y}' & \boldsymbol{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{x} & \boldsymbol{y}'^T\boldsymbol{x} & \boldsymbol{z}'^T\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{y} & \boldsymbol{y}'^T\boldsymbol{y} & \boldsymbol{z}'^T\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{z} & \boldsymbol{y}'^T\boldsymbol{z} & \boldsymbol{z}'^T\boldsymbol{z} \end{bmatrix}$$

Sea **r'** un vector perteneciente al rígido: **r' =** $r'_{x'} + r'_{y'} + r'_{z'}$

Se puede representar el mismo vector (a menos de un desplazamiento) en el sistema de referencia ***xyz*** como: **r** = $r_x + r_y + r_z$

Que cumplirá que: **r = Rr'**

Siendo **R** la matriz de rotación de ***x'y'z'*** en ***xyz***

Si en particular se utiliza **r** como ***x'***, ***y'*** y ***z'***, se puede decir que **R** define la **orientación *x'y'z'*** según ***xyz***

Matriz de Rotación

Algunas características:

Columnas ortonormales: $\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{y}' = 0 \quad \boldsymbol{y}'^T\boldsymbol{z}' = 0 \quad \boldsymbol{z}'^T\boldsymbol{x}' = 0$

Vectores unitarios $\boldsymbol{x}'^T\boldsymbol{x}' = 1 \quad \boldsymbol{y}'^T\boldsymbol{y}' = 1 \quad \boldsymbol{z}'^T\boldsymbol{z}' = 1$

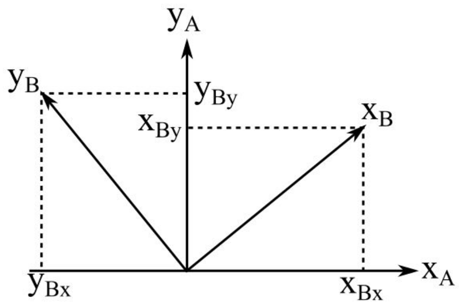
Matriz ortonormal: $\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}_3 \quad \boldsymbol{R}^T = \boldsymbol{R}^{-1}$

Terna de vectores orientados según regla de la mano derecha / izquierda: $\det(\boldsymbol{R}) = 1$ / $\det(\boldsymbol{R}) = -1$

Matriz de Rotación

Aplicaciones:

- Una matriz de rotación describe la orientación mutua entre dos sistemas de coordenadas

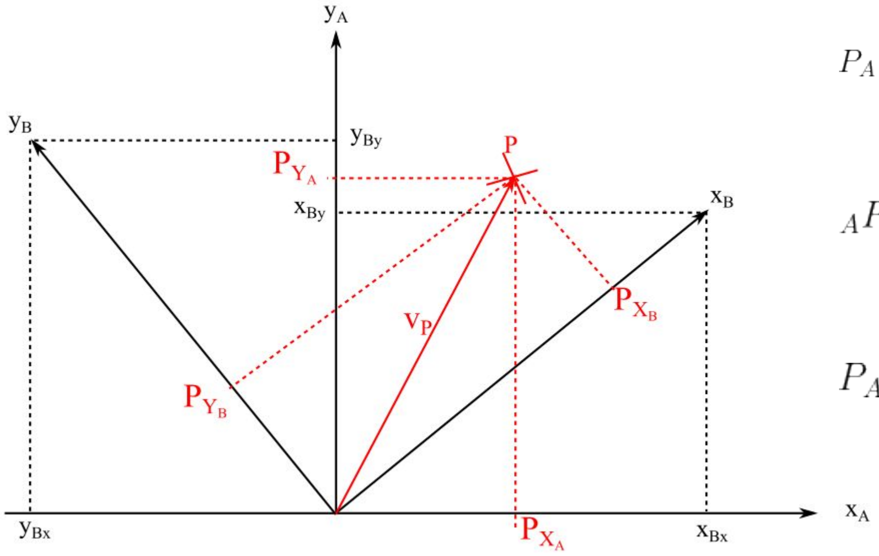


Orientación de B con respecto a A: $${}_A R_B = \begin{pmatrix} x_{Bx} & y_{Bx} \\ x_{By} & y_{By} \end{pmatrix}$$

Matriz de Rotación

Aplicaciones:

- Una matriz de rotación representa la transformación de coordenadas entre las coordenadas de un punto expresada en dos sistemas diferentes (con igual origen)



$$P_A = \begin{pmatrix} P_{X_A} \\ P_{Y_A} \end{pmatrix} \qquad P_B = \begin{pmatrix} P_{X_B} \\ P_{Y_B} \end{pmatrix}$$

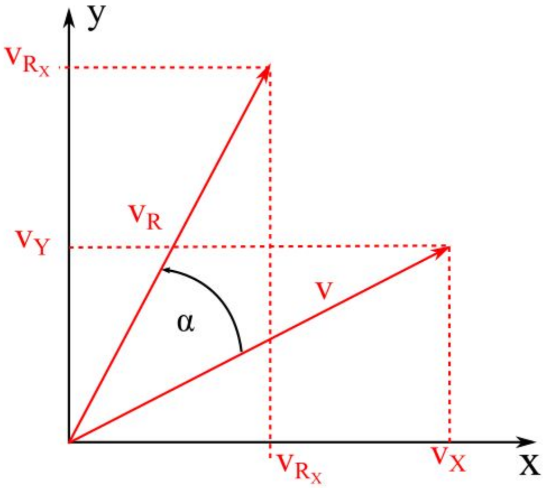
$$_AR_B = \begin{pmatrix} x_{Bx} & y_{Bx} \\ x_{By} & y_{By} \end{pmatrix}$$

$$P_A = \ _AR_B \ P_B$$

Matriz de Rotación

Aplicaciones:

- Una matriz de rotación es el operador que permite la rotación de un vector en el mismo sistema de coordenadas



$$v = \begin{pmatrix} v_X \\ v_y \end{pmatrix} \qquad v_R = \begin{pmatrix} v_{R_X} \\ v_{R_Y} \end{pmatrix}$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$v_R = R_\alpha \; v$$

Matriz de Rotación

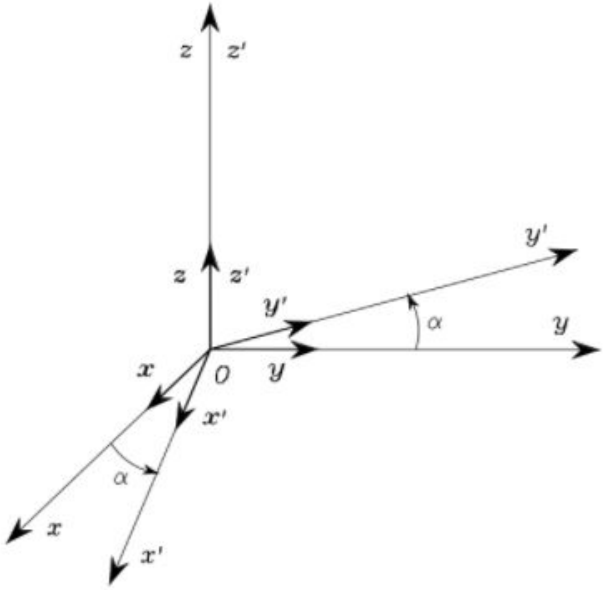
Rotaciones Elementales

- Consisten en las rotaciones del sistema de referencia sobre uno de sus ejes
- Signo positivo según la regla de la mano derecha

Por ejemplo: Si se rota un sistema ***xyz*** un ángulo ***α*** según el eje ***z***, obtenemos un nuevo sistema ***x´y´z´***

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{y}' = \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{z}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Matriz de Rotación

Rotaciones Elementales

De forma análoga se obtienen las matrices de rotaciones elementales en los otros ejes: ***y*** y ***x.***

$$\boldsymbol{R}_y(\beta) = \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_x(\gamma) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

Estas matrices de rotación elementales pueden considerarse como la rotación necesaria para la alineación de los ejes de orientación de un rígido con respecto a un sistema de referencia.

Propiedad:

Al ser $\boldsymbol{R_k(\theta)}$ una matriz de rotación, ésta cumple que $\boldsymbol{R_k(\theta)^{-1} = R_k(\theta)^T}$

$\boldsymbol{R_k(\theta)^{-1}}$ **:** Significa aplicar la rotación inversa $\rightarrow \boldsymbol{R_k(\theta)^{-1} = R_k(-\theta)}$

$\rightarrow$ Se cumple que: $\boldsymbol{R_k(-\theta) = R_k(\theta)^T}$, *para k = x, y, z* $\rightarrow \boldsymbol{R_k(-\theta)R_k(\theta) = R_k(\theta)^T R_k(\theta) = R_k(\theta)^{-1} R_k(\theta)^T = Id} \rightarrow$ ***No rotación!***

Composición de Matrices de Rotación

Digamos que tenemos tres sistemas de referencia ortonormales con igual origen: S_0: (x_0,y_0,z_0), S_1: (x_1,y_1,z_1), S_2: (x_2,y_2,z_2) y un punto ***P*** fijo en el espacio que puede representarse en cada sistema (S_0, S_1, S_2) con un vector $\boldsymbol{p_0}$, $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, respectivamente.

Además, consideremos las matrices de Rotación del sistema S_2 al sistema S_1, y la del sistema S_1 al S_0 como, ${}_1R_2$ y ${}_0R_1$ respectivamente.

Sabemos entonces que:

$$\mathbf{p}_0 = {}_0R_1\mathbf{p}_1$$

y

$$\mathbf{p}_1 = {}_1R_2\mathbf{p}_2$$

Sustituyendo:

$$\mathbf{p}_0 = {}_0R_1\,{}_1R_2\mathbf{p}_2$$

Entonces, se puede decir que:

$$\mathbf{p}_0 = {}_0R_2\mathbf{p}_2$$

Siendo:

$${}_0R_2 = {}_0R_1\,{}_1R_2$$

y en forma general:

$${}_jR_i = {}_jR_{j+1}\ldots\,{}_{i-1}R_i$$

Donde ${}_jR_i$ denota la matriz de rotación de *i* con respecto a *j*

Matriz de Rotación

Composición de rotaciones elementales

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones.

Imaginemos un movimiento definido por tres rotaciones elementales consecutivas:

1. Rotación de ángulo $\boldsymbol{\alpha_1}$ alrededor del eje **x**
2. Rotación de ángulo $\boldsymbol{\alpha_2}$ alrededor del eje **y**
3. Rotación de ángulo $\boldsymbol{\alpha_3}$ alrededor del eje **z**

$$\mathbf{T = R_z(\alpha_3)R_y(\alpha_2)R_x(\alpha_1)} = \begin{pmatrix} C\alpha_3 & -S\alpha_3 & 0 \\ S\alpha_3 & C\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\alpha_2 & 0 & S\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\alpha_2 & 0 & C\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_1 & -S\alpha_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Donde se simplifica (de aquí en más) cos(α) y sin(α) por Cα y *Sα respectivamente.*

Matriz de Rotación

Composición de rotaciones elementales

Las matrices de rotación pueden componerse para expresar la aplicación continua de varias rotaciones.

Imaginemos un movimiento definido por tres rotaciones elementales consecutivas:

1. Rotación de ángulo α_1 alrededor del eje **x**
2. Rotación de ángulo α_2 alrededor del eje **y**
3. Rotación de ángulo α_3 alrededor del eje **z**

ATENCIÓN: Como el producto de matrices no es conmutativo, el orden de aplicación de las multiplicaciones debe ser el mismo en el que se aplican las rotaciones.

$$T = R_z(\alpha_3)R_y(\alpha_2)R_x(\alpha_1) = \begin{pmatrix} C\alpha_3 & -S\alpha_3 & 0 \\ S\alpha_3 & C\alpha_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C\alpha_2 & 0 & S\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\alpha_2 & 0 & C\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_1 & -S\alpha_1 \\ 0 & S\alpha_1 & C\alpha_1 \end{pmatrix}$$

Donde se simplifica (de aquí en más) cos(α) y sin(α) por $C\alpha$ y *$S\alpha$ respectivamente.*

Descripción de orientación

Las matrices de rotación dan una descripción de la orientación de un sistema con **9 parámetros!**

¿Son necesarios 9 parámetros para definir la orientación de un rígido?

Descripción de orientación

Las matrices de rotación dan una descripción de la orientación de un sistema con **9 parámetros!**

¿Son necesarios 9 parámetros para definir la orientación de un rígido?

Descripción de orientación

Las matrices de rotación dan una descripción de la orientación de un sistema con **9 parámetros!**

¿Son necesarios 9 parámetros para definir la orientación de un rígido?

Tres parámetros son suficientes para describir la orientación de un rígido.

Una representación con tres parámetros constituye la **representación mínima**, pero existen diferentes tipos de representaciones de la orientación de un rígido.

En un espacio tridimensional, se tiene:

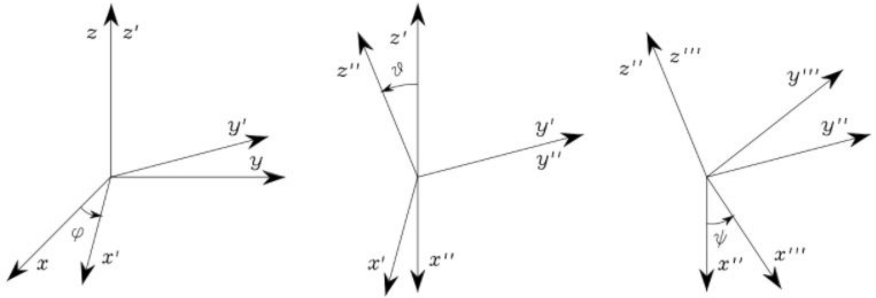
- Matriz de rotación → 9 parámetros (matriz de 3x3) [6 restricciones de ortonormalidad]
- Ángulos de Euler → 3 parámetros (3 ángulos $\boldsymbol{\phi} = [\varphi \quad \vartheta \quad \psi]^T$)
- Eje y ángulo → 4 parámetros (un eje de 3 coordenadas y un ángulo de giro) [1 restricción de normalidad]
- Cuaterniones → 4 parámetros (variante del eje y ángulo) [1 restricción de normalidad]
- Matrices de transformación homogénea → 12 parámetros (notación compacta de Rot + Despl) [6 restricciones de ortonormalidad]

Ángulos de Euler

Los ángulos de Euler constituyen un conjunto de **tres coordenadas angulares** que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales.

Considerando 3 giros consecutivos (φ ϑ ψ) alrededor de 3 de los ejes del sistema se pueden obtener 27 posibles combinaciones en función de cuál eje es considerado como eje de giro en cada una de las 3 etapas.

$$\phi = [\varphi \quad \vartheta \quad \psi]^T$$



Sin embargo, aquellas combinaciones que aseguran no rotar 2 veces seguidas en ejes paralelos reducen a 12 posibles conjuntos de ángulos, donde cada conjunto representa un trío de ***Ángulos de Euler*.**

Estudiaremos dos casos particulares: Los ángulos **ZYZ** y los ángulos **ZYX** (conocidos como Roll - Pitch - Yaw)

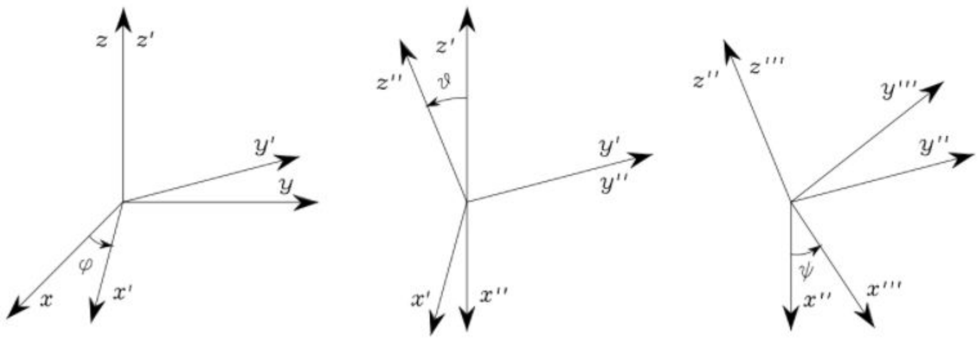
Ángulos de Euler

Ángulos de Euler ZYZ

La rotación descrita por los ángulos de Euler ZYZ es obtenida como la composición de las siguientes rotaciones elementales.

- Rotar el sistema de referencia un ángulo φ alrededor del eje **z** → $\mathbf{R_z(\varphi)}$
- Rotar el sistema obtenido un ángulo ϑ alrededor del eje **y'** obtenido → $\mathbf{R_{y'}(\vartheta)}$
- Rotar el sistema obtenido un ángulo ψ alrededor del eje **z''** obtenido → $\mathbf{R_{z''}(\psi)}$

$$\boldsymbol{\phi} = \begin{bmatrix} \varphi & \vartheta & \psi \end{bmatrix}^T$$



$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{R}_z(\varphi)\boldsymbol{R}_{y'}(\vartheta)\boldsymbol{R}_{z''}(\psi)$$
$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta c_\psi - s_\varphi s_\psi & -c_\varphi c_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta \\ s_\varphi c_\vartheta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta \\ -s_\vartheta c_\psi & s_\vartheta s_\psi & c_\vartheta \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler

Muchas veces será necesario resolver el problema inverso.

Problema inverso: Determinar el conjunto de 3 Euler ángulos que se corresponden con determinada matriz de rotación conocida.

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta &= \mathrm{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(r_{32}, -r_{31}). \end{aligned}$$

Ángulos de Euler

Muchas veces será necesario resolver el problema inverso.

Problema inverso: Determinar el conjunto de 3 Euler ángulos que se corresponden con determinada matriz de rotación conocida.

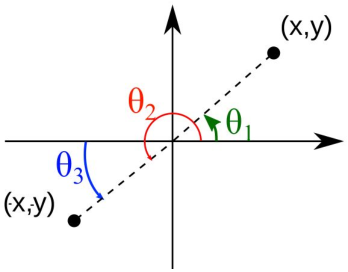
$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\varphi = \mathrm{Atan2}(r_{23}, r_{13})$$

$$\vartheta = \mathrm{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right)$$

$$\psi = \mathrm{Atan2}(r_{32}, -r_{31}).$$

Siendo ***Atan2***, el arcotangente de y/x que utiliza los signos de cada término para evaluar en qué cuadrante se encuentra el resultado:



θ_1 = Atan(y/x) = Atan2(y,x)

θ_3 = Atan(-y/-x) = Atan(y/x) = θ_1

θ_2 = Atan2(-y,-x)

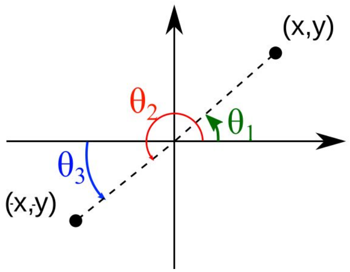
Ángulos de Euler

Muchas veces será necesario resolver el problema inverso.

Problema inverso: Determinar el conjunto de 3 Euler ángulos que se corresponden con determinada matriz de rotación conocida.

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \varphi &= \text{Atan2}(r_{23}, r_{13}) \\ \vartheta &= \text{Atan2}\left(\sqrt{r_{13}^2 + r_{23}^2}, r_{33}\right) \\ \psi &= \text{Atan2}(r_{32}, -r_{31}). \end{aligned}$$

Siendo ***Atan2***, el arcotangente de y/x que utiliza los signos de cada término para evaluar en qué cuadrante se encuentra el resultado:



θ_1 = Atan(y/x) = Atan2(y,x)

θ_3 = Atan(-y/-x) = Atan(y/x) = θ_1

θ_2 = Atan2(-y,-x)

Esta solución tiene problemas cuando **sin(θ) = 0** dado que la rotación alinea ciertos ejes, provocando que las otras rotaciones se den sobre ejes paralelos y por lo tanto otorgando contribuciones equivalentes a la rotación. En ese caso sólo se puede determinar la suma o la resta de φ y ψ, pero no cada ángulo.

Este efecto es conocido como ***singularidades*** de los ángulos de Euler, y todo representación mínima posee estos conflictos.

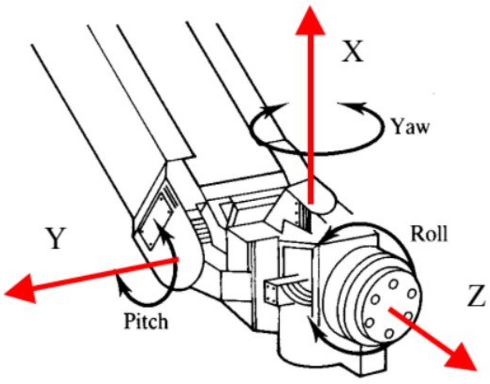
Ángulos de Euler

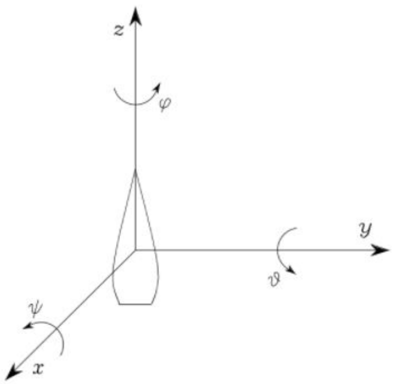
Ángulos de Euler ZYX (o RPY | Roll - Pitch - Yaw)

La rotación descrita por los ángulos de Euler RPY es muy conocida por su uso en el campo de la aeronáutica. Los ángulos conocidos como Roll - Pitch - Yaw son utilizados para denotar los cambios típicos de movimiento en las aeronaves.

La rotación resultante es obtenida como la composición de las siguientes rotaciones elementales.

- Rotar el sistema de referencia un ángulo φ alrededor del eje **z** → **$R_z(\varphi)$**
- Rotar el sistema de referencia un ángulo ϑ alrededor del eje **y** → **$R_y(\vartheta)$**
- Rotar el sistema de referencia un ángulo ψ alrededor del eje **z** → **$R_z(\psi)$**





$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{R}_z(\varphi)\boldsymbol{R}_y(\vartheta)\boldsymbol{R}_x(\psi)$$
$$= \begin{bmatrix} c_\varphi c_\vartheta & c_\varphi s_\vartheta s_\psi - s_\varphi c_\psi & c_\varphi s_\vartheta c_\psi + s_\varphi s_\psi \\ s_\varphi c_\vartheta & s_\varphi s_\vartheta s_\psi + c_\varphi c_\psi & s_\varphi s_\vartheta c_\psi - c_\varphi s_\psi \\ -s_\vartheta & c_\vartheta s_\psi & c_\vartheta c_\psi \end{bmatrix}$$

Ángulos de Euler

Podemos resolver también el **problema inverso** y obtener los ángulos para una matriz de rotación

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \mathrm{Atan2}(r_{21}, r_{11}) \\ \vartheta &= \mathrm{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right) \\ \psi &= \mathrm{Atan2}(r_{32}, r_{33}). \end{aligned}$$

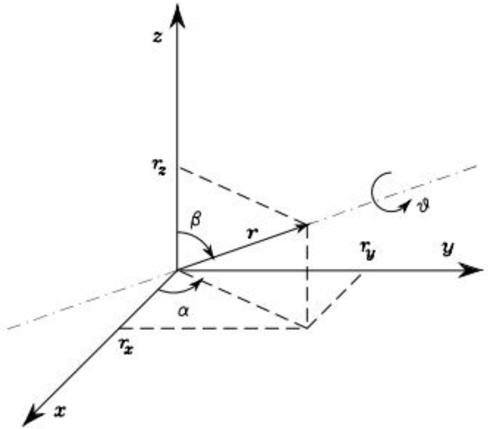
Esta solución tiene problemas cuando **cos(θ) = 0** dado que la rotación alinea ciertos ejes, provocando que las otras rotaciones se den sobre ejes paralelos y por lo tanto otorgando contribuciones equivalentes a la rotación. En ese caso sólo se puede determinar la suma o la resta de φ y ψ, pero no cada ángulo.

Ángulo y Vector

Una representación **no mínima** de la orientación de un rígido con respecto a un sistema de referencia puede ser obtenida a través de 4 parámetros que expresan una rotación de un ángulo **θ** alrededor de un **eje unitario r** en el espacio.

La rotación resultante es obtenida como la composición de las siguientes rotaciones elementales.

- Alinear **z** con **r:** Rotar −α alrededor de **z**, luego rotar −β alrededor de **y** → $\mathbf{R_y(-\beta)R_z(-\alpha)}$
- Rotar ϑ alrededor del eje **z** → $\mathbf{R_z(\vartheta)}$
- Desaliner **z** y **r:** Rotar β alrededor de **y**, luego Rotar α alrededor de **z**→ $\mathbf{R_z(\alpha)R_y(\beta)}$



$$\boldsymbol{R}(\vartheta,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_z(\vartheta)\boldsymbol{R}_y(-\beta)\boldsymbol{R}_z(-\alpha)$$

$$\boldsymbol{R}(\vartheta,\boldsymbol{r}) = \begin{bmatrix} r_x^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta & r_x r_y(1-c_\vartheta)-r_z s_\vartheta & r_x r_z(1-c_\vartheta)+r_y s_\vartheta \\ r_x r_y(1-c_\vartheta)+r_z s_\vartheta & r_y^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta & r_y r_z(1-c_\vartheta)-r_x s_\vartheta \\ r_x r_z(1-c_\vartheta)-r_y s_\vartheta & r_y r_z(1-c_\vartheta)+r_x s_\vartheta & r_z^2(1-c_\vartheta)+c_\vartheta \end{bmatrix}.$$

Ángulo y Vector

Podemos resolver también el **problema inverso** y obtener los ángulos para una matriz de rotación

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\vartheta = \cos^{-1}\left(\frac{r_{11}+r_{22}+r_{33}-1}{2}\right)$$

$$\boldsymbol{r} = \frac{1}{2\sin\vartheta}\begin{bmatrix} r_{32}-r_{23} \\ r_{13}-r_{31} \\ r_{21}-r_{12} \end{bmatrix},$$

La solución del **problema inverso** se hace singular cuando **sin(θ) = 0** , en este caso para resolver el problema inverso habría que referirse a la definición directa de matriz de rotación y resolverla para cuando **θ = 0,** o **θ = π.**

Notar que para **θ = 0**, como la rotación es nula, cualquier vector podría ser el eje de rotación ⇒ son infinitos (*singularidad*)

Cuaterniones

La desventaja de la representación Ángulo-Eje, puede ser evadida con la representación por cuaterniones Q(η,**ε**) que están formados por 4 parámetros definidos en función del ángulo de giro θ, alrededor del eje **r**, como sigue:

- $\eta = \cos(\theta/2)$
- $\varepsilon_x = \sin(\theta/2).r_x$
- $\varepsilon_y = \sin(\theta/2).r_y$
- $\varepsilon_z = \sin(\theta/2).r_z$

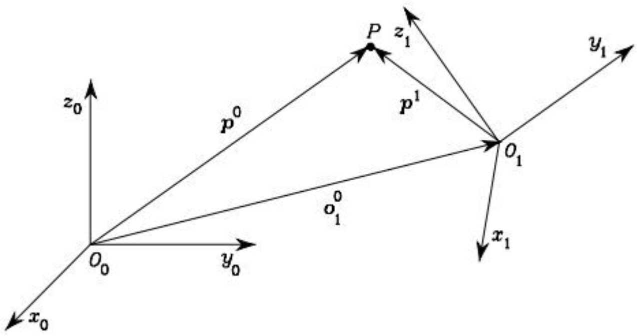
Sin embargo, los cuaterniones tienen la desventaja que no diferencia entre un giro de θ alrededor del eje **r**, y un giro de -θ, alrededor del eje **-r**

Otra "desventaja" es que estos vectores de 4 elementos es que definen su propio "producto", es decir que el producto de dos cuaterniones no es el habitual.

Matriz de transformación Homogénea

Sea $\boldsymbol{P}$ un punto arbitrario del espacio, entonces $\boldsymbol{p}^0$ es el vector que posiciona $\boldsymbol{P}$ según el sistema de referencia $\boldsymbol{S}_0$. Consideremos otro sistema de referencia $\boldsymbol{S}_1$, donde $\boldsymbol{o}_1^0$ posiciona al sistema $\boldsymbol{S}_1$ según el sistema $\boldsymbol{S}_0$ y ${}_0\boldsymbol{R}_1$ es la matriz de rotación del sistema $\boldsymbol{S}_1$ con respecto al sistema $\boldsymbol{S}_0$.

Sea además $\boldsymbol{p}^1$ el vector de $\boldsymbol{P}$ en el sistema $\boldsymbol{S}_1$.

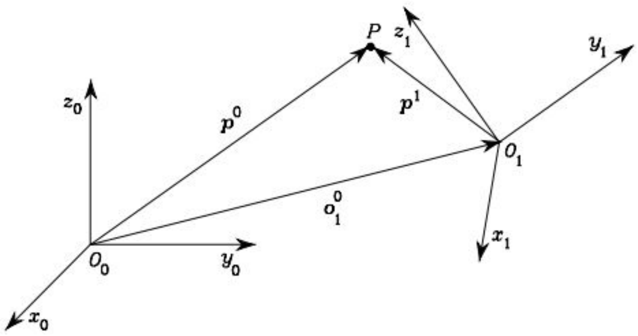


Matriz de transformación Homogénea

Sea ***P*** un punto arbitrario del espacio, entonces $\boldsymbol{p^0}$ es el vector que posiciona ***P*** según el sistema de referencia $\boldsymbol{S_0}$. Consideremos otro sistema de referencia $\boldsymbol{S_1}$, donde $\boldsymbol{o_1^0}$ posiciona al sistema $\boldsymbol{S_1}$ según el sistema $\boldsymbol{S_0}$ y $\boldsymbol{{}_0R_1}$ es la matriz de rotación del sistema $\boldsymbol{S_1}$ con respecto al sistema $\boldsymbol{S_0}$.

Sea además $\boldsymbol{p^1}$ el vector de ***P*** en el sistema $\boldsymbol{S_1}$.

Entonces, se cumple que: $\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + {}_0\mathbf{R}_1\mathbf{p}^1$ es la ***transformación de coordenadas*** de un vector entre dos sistemas de referencia.

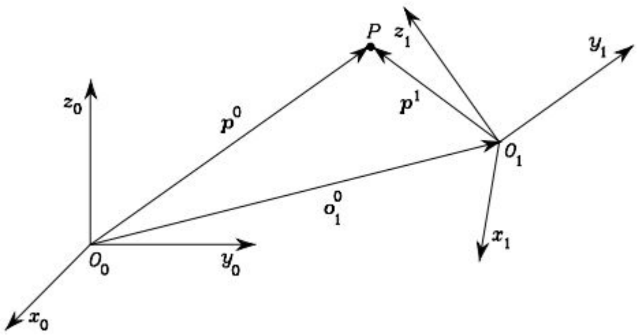


Matriz de transformación Homogénea

Sea ***P*** un punto arbitrario del espacio, entonces $\mathbf{p}^0$ es el vector que posiciona ***P*** según el sistema de referencia S_0. Consideremos otro sistema de referencia S_1, donde $\mathbf{o}_1^0$ posiciona al sistema S_1 según el sistema S_0 y ${}_0R_1$ es la matriz de rotación del sistema S_1 con respecto al sistema S_0.

Sea además $\mathbf{p}^1$ el vector de ***P*** en el sistema S_1.

Entonces, se cumple que: $\mathbf{p}^0 = \mathbf{o}_1^0 + {}_0\mathbf{R}_1\mathbf{p}^1$ es la ***transformación de coordenadas*** de un vector entre dos sistemas de referencia.



Se puede obtener la transformación inversa (obtener $\mathbf{p}^1$) despejando de la ecuación:

$${}_0\mathbf{R}_1\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 - \mathbf{o}_1^0$$

$$\mathbf{p}^1 = {}_0\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{p}^0 - {}_0\mathbf{R}_1^{-1}\mathbf{o}_1^0$$

$$\mathbf{p}^1 = {}_0\mathbf{R}_1^{T}\mathbf{p}^0 - {}_0\mathbf{R}_1^{T}\mathbf{o}_1^0$$

Matriz de transformación Homogénea

Para obtener una representación compacta de la relación entre las coordenadas de un punto en dos sistemas de referencia utilizamos la representación homogénea de un vector, que va a ser de utilidad en la operatoria.

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene simplemente agregando una cuarta componente unitaria al vector ***p*.**

Matriz de transformación Homogénea

Para obtener una representación compacta de la relación entre las coordenadas de un punto en dos sistemas de referencia utilizamos la representación homogénea de un vector, que va a ser de utilidad en la operatoria.

$$\widetilde{\boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene simplemente agregando una cuarta componente unitaria al vector ***p.***

Construimos entonces la ***Matriz de Transformación Homogénea***:

$$_0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{R}_1 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación Homogénea

Para obtener una representación compacta de la relación entre las coordenadas de un punto en dos sistemas de referencia utilizamos la representación homogénea de un vector, que va a ser de utilidad en la operatoria.

$$\widetilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene simplemente agregando una cuarta componente unitaria al vector ***p*.**

Construimos entonces la ***Matriz de Transformación Homogénea***:

$${}_0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{R}_1 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz cumple de forma compacta con transformar un vector $\boldsymbol{p^1}$ en el sistema $\boldsymbol{S_1}$ a un vector $\boldsymbol{p^0}$ en el sistema $\boldsymbol{S_0}$.

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = {}_0\mathbf{A}_1\widetilde{\mathbf{p}}^1$$

$$\widetilde{\mathbf{p}}^1 = {}_1\mathbf{A}_0\widetilde{\mathbf{p}}^0 = ({}_0\mathbf{A}_1)^{-1}\widetilde{\mathbf{p}}^0$$

Matriz de transformación Homogénea

Para obtener una representación compacta de la relación entre las coordenadas de un punto en dos sistemas de referencia utilizamos la representación homogénea de un vector, que va a ser de utilidad en la operatoria.

$$\widetilde{p} = \begin{bmatrix} p \\ \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se obtiene simplemente agregando una cuarta componente unitaria al vector ***p*.**

Construimos entonces la ***Matriz de Transformación Homogénea***:

$$_0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} _0\mathbf{R}_1 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz cumple de forma compacta con transformar un vector $\boldsymbol{p}^1$ en el sistema $\boldsymbol{S}_1$ a un vector $\boldsymbol{p}^0$ en el sistema $\boldsymbol{S}_0$.

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = {}_0\mathbf{A}_1\widetilde{\mathbf{p}}^1$$

$$\widetilde{\mathbf{p}}^1 = {}_1\mathbf{A}_0\widetilde{\mathbf{p}}^0 = ({}_0\mathbf{A}_1)^{-1}\widetilde{\mathbf{p}}^0$$

Prestar **ATENCIÓN** que en las matrices de transformación homogénea no se cumple la ortonormalidad de A, es decir:

$$\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T$$

Matriz de transformación Homogénea

Considerando las definiciones anteriores de los vectores ***p***^{0} y ***p***^{1},

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = {}_0\mathbf{A}_1\widetilde{\mathbf{p}}^1 \qquad \widetilde{\mathbf{p}}^1 = {}_1\mathbf{A}_0\widetilde{\mathbf{p}}^0 = ({}_0\mathbf{A}_1)^{-1}\widetilde{\mathbf{p}}^0 \qquad {}_0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{R}_1 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

¿cómo quedaría la matriz de transformación homogénea?

Matriz de transformación Homogénea

Considerando las definiciones anteriores de los vectores ***p⁰*** y ***p¹***,

$$\widetilde{\mathbf{p}}^0 = {}_0\mathbf{A}_1\widetilde{\mathbf{p}}^1 \qquad \widetilde{\mathbf{p}}^1 = {}_1\mathbf{A}_0\widetilde{\mathbf{p}}^0 = ({}_0\mathbf{A}_1)^{-1}\widetilde{\mathbf{p}}^0 \qquad {}_0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{R}_1 & \mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

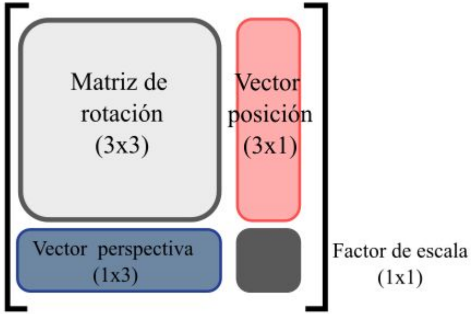
¿cómo quedaría la matriz de transformación homogénea?

$${}_0\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} {}_1\mathbf{R}_0 & \mathbf{o}_0^1 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \qquad {}_1\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{R}_1^T & -\ {}_0\mathbf{R}_1^T\mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación Homogénea

Se puede demostrar que las matrices de transformación homogénea tienen ciertas propiedades:

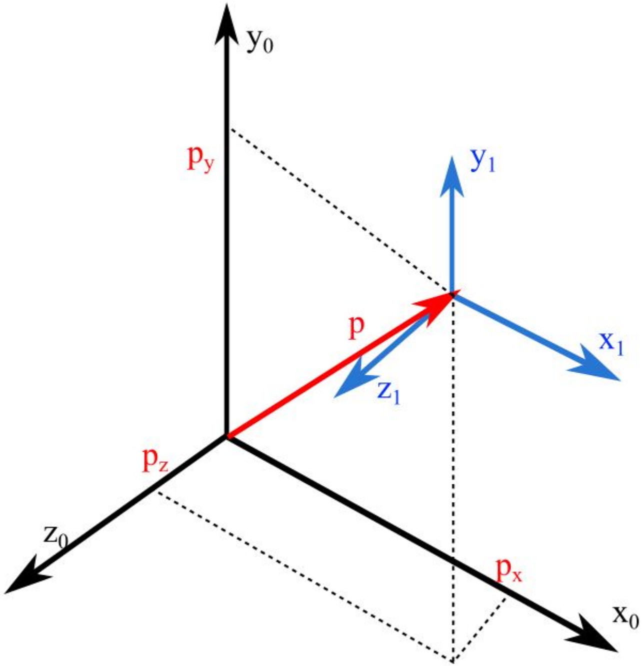
- Como ya vimos: $\mathbf{A}^{-1} \neq \mathbf{A}^T$
- También que: $({}_0\mathbf{A}_1)^{-1} = {}_1\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} {}_0\mathbf{R}_1^T & -{}_0\mathbf{R}_1^T\mathbf{o}_1^0 \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}$
- La matriz se compone por:



- También vale la composición de matrices: $\widetilde{\mathbf{p}}^0 = {}_0\mathbf{A}_1\ {}_1\mathbf{A}_2 \ldots {}_{n-1}\mathbf{A}_n\ \widetilde{\mathbf{p}}^n$

Matriz de transformación Homogénea

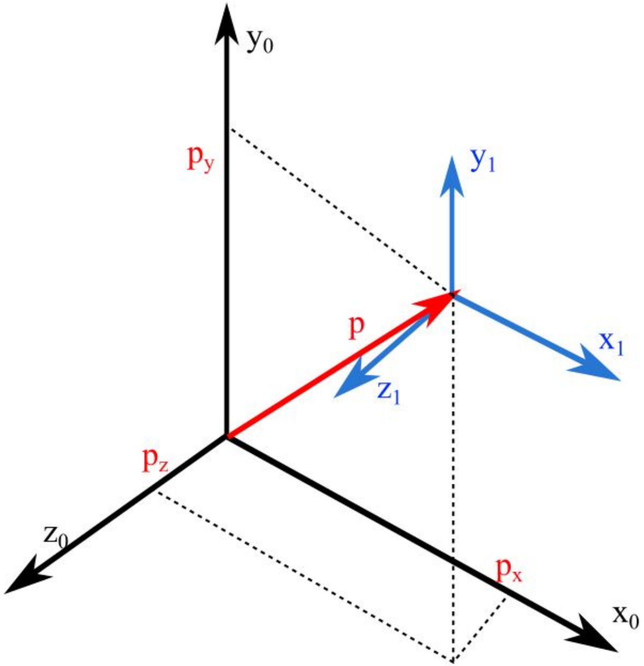
Traslación:



$$ {}_0\mathbf{T}_1 = ? $$

Matriz de transformación Homogénea

Traslación:



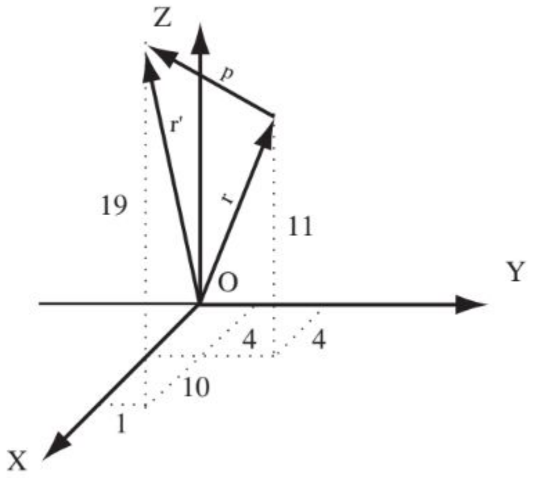
$$ {}_0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

Matriz de transformación Homogénea

Traslación:

¿Cómo se puede usar una **matriz de transformación homogénea** para calcular el desplazamiento de un vector

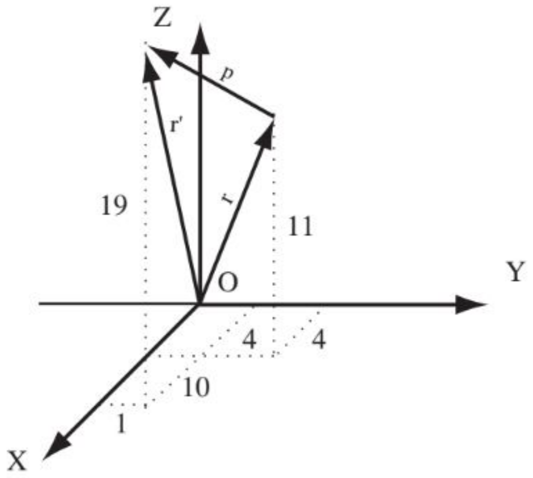
r=(4,4,11), según el vector **p=(6,-3,8)**?



Matriz de transformación Homogénea

Traslación:

¿Cómo se puede usar una **matriz de transformación homogénea** para calcular el desplazamiento de un vector **r=(4,4,11),** según el vector **p=(6,-3,8)**?



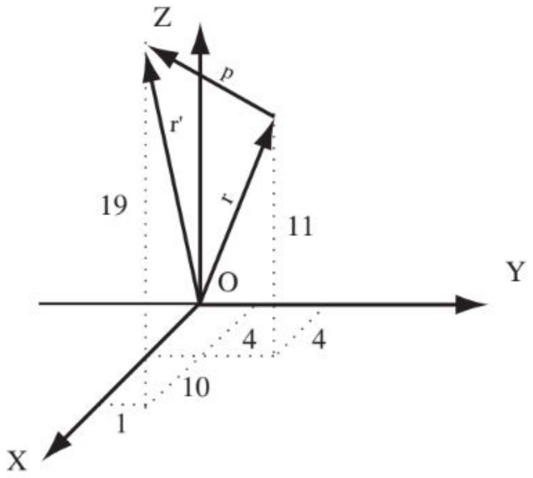
$$
{}_0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Matriz de transformación Homogénea

Traslación:

¿Cómo se puede usar una **matriz de transformación homogénea** para calcular el desplazamiento de un vector

r=(4,4,11), según el vector **p=(6,-3,8)**?



$$ {}_0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

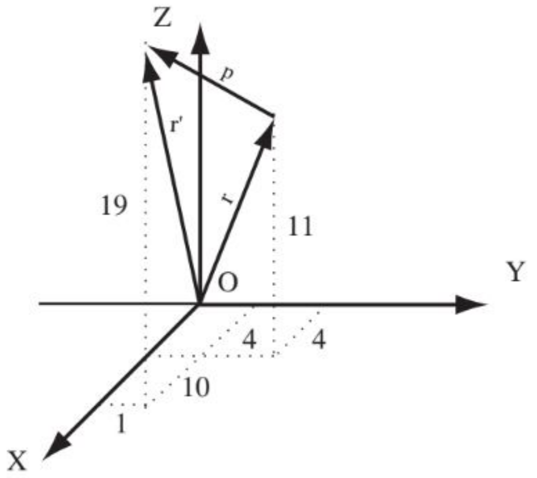
$$ \mathbf{r}^0 = {}_0\mathbf{T}_1 \mathbf{r}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Matriz de transformación Homogénea

Traslación:

¿Cómo se puede usar una **matriz de transformación homogénea** para calcular el desplazamiento de un vector

r=(4,4,11), según el vector **p=(6,-3,8)**?



$$ {}_0\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

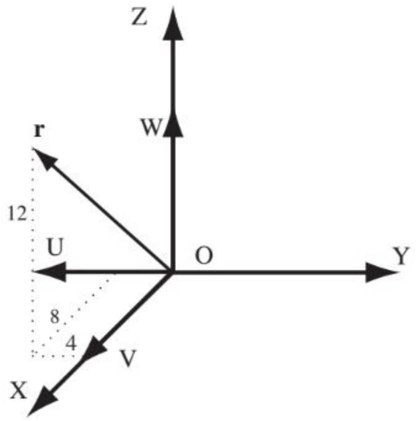
$$ \mathbf{r}^0 = {}_0\mathbf{T}_1 \mathbf{r}^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación:

Según la figura, el sistema OUVW se encuentra girado 90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ.

Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw} = (4, 8, 12)$.

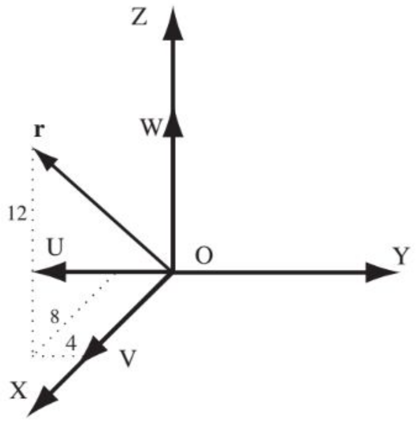


Matriz de transformación Homogénea

Rotación:

Según la figura, el sistema OUVW se encuentra girado 90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ.

Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw}$ **= (4, 8, 12)**.



Si tuviéramos la **MTH** de UVW con respecto XYZ?

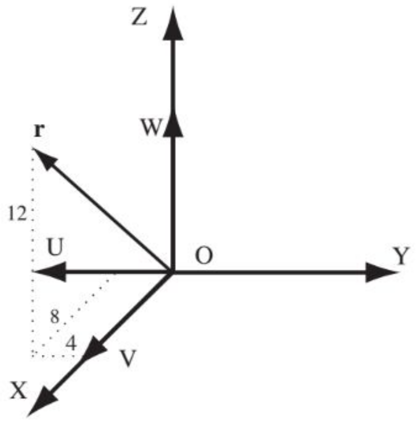
$$\mathbf{r}_{xyz} = {}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw}\ \mathbf{r}_{uvw}$$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación:

Según la figura, el sistema OUVW se encuentra girado 90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ.

Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw} = (4, 8, 12)$.



Si tuviéramos la **MTH** de UVW con respecto XYZ?

$$\mathbf{r}_{xyz} = {}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw}\ \mathbf{r}_{uvw}$$

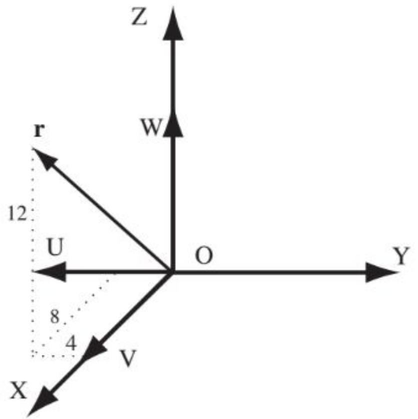
$${}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw} = [\widetilde{\mathbf{r}}_u\ \widetilde{\mathbf{r}}_v\ \widetilde{\mathbf{r}}_w\ {}_{xyz}\widetilde{\mathbf{p}}_{uvw}]$$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación:

Según la figura, el sistema OUVW se encuentra girado 90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ.

Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw} = (4, 8, 12)$.



Si tuviéramos la **MTH** de UVW con respecto XYZ?

$$\mathbf{r}_{xyz} = {}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw}\ \mathbf{r}_{uvw}$$

$${}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw} = \left[\widetilde{\mathbf{r}}_u\ \widetilde{\mathbf{r}}_v\ \widetilde{\mathbf{r}}_w\ {}_{xyz}\widetilde{\mathbf{p}}_{uvw}\right]$$

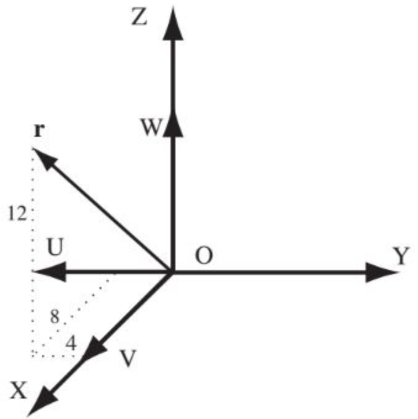
$${}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación:

Según la figura, el sistema OUVW se encuentra girado 90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ.

Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw}$ **= (4, 8, 12)**.



Si tuviéramos la **MTH** de UVW con respecto XYZ?

$$\mathbf{r}_{xyz} = {}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw}\ \mathbf{r}_{uvw}$$

$${}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw} = [\widetilde{\mathbf{r}}_u\ \widetilde{\mathbf{r}}_v\ \widetilde{\mathbf{r}}_w\ {}_{xyz}\widetilde{\mathbf{p}}_{uvw}]$$

$${}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Recordando que la matriz de rotación (elemental) alrededor del eje **z**, un ángulo α, se calcula como:

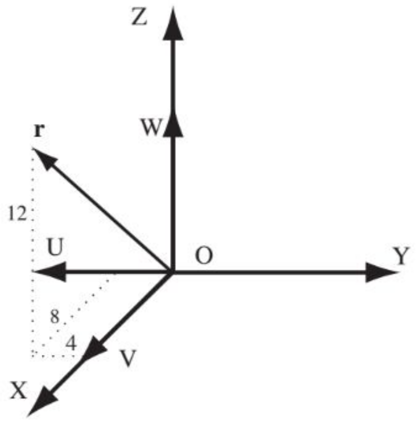
$$\boldsymbol{R}_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación:

Según la figura, el sistema OUVW se encuentra girado 90° alrededor del eje OZ con respecto al sistema OXYZ.

Calcular las coordenadas del vector $\mathbf{r}_{xyz}$ si sus coordenadas en el sistema OUVW son $\mathbf{r}_{uvw}$ **= (4, 8, 12)**.



Si tuviéramos la **MTH** de UVW con respecto XYZ?

$$\mathbf{r}_{xyz} = {}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw}\ \mathbf{r}_{uvw}$$

$${}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw} = [\widetilde{\mathbf{r}}_u\ \widetilde{\mathbf{r}}_v\ \widetilde{\mathbf{r}}_w\ {}_{xyz}\widetilde{\mathbf{p}}_{uvw}]$$

$${}_{xyz}\mathbf{T}_{uvw} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 12 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación + Traslación:

Para analizar las rotaciones en conjunto con las traslaciones hay que considerar que el **orden** en el que se realizaron las transformaciones, dado que estas operaciones (como ya se mencionó) no son conmutativas.

- **Rotación luego traslación**

Consideremos una rotación de ángulo **θ** alrededor del eje **y**, luego un desplazamiento según un vector **p**.

$$\mathbf{T} = Tras(\mathbf{p}) \times Rot_y(\theta) = \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ -s\theta & 0 & c\theta & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación + Traslación:

Para analizar las rotaciones en conjunto con las traslaciones hay que considerar que el **orden** en el que se realizaron las transformaciones, dado que estas operaciones (como ya se mencionó) no son conmutativas.

- **Traslación luego Rotación**

Consideremos un desplazamiento según un vector **p**, luego una rotación de ángulo **ϕ** alrededor del eje **x**

$$\mathbf{T} = Rot_x(\phi)Tras(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & c\phi & -s\phi & p_y c\phi - p_z s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi & p_y c\phi + p_z c\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformación Homogénea

Rotación + Traslación:

Para analizar las rotaciones en conjunto con las traslaciones hay que considerar que el **orden** en el que se realizaron las transformaciones, dado que estas operaciones (como ya se mencionó) no son conmutativas.

- **Traslación luego Rotación**

Consideremos un desplazamiento según un vector **p**, luego una rotación de ángulo **ϕ** alrededor del eje **x**

$$\mathbf{T} = Rot_x(\phi)Tras(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & c\phi & -s\phi & p_y c\phi - p_z s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi & p_y c\phi + p_z c\phi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Estos casos son de ejemplificación.

En la práctica, hay que hacer el producto de la MTH asociada a la rotación con la MTH asociada al desplazamiento, en el orden que corresponda.


FIN!