Clase No. 11 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Teorema de Cauchy en ciclos.

Para continuar con el curso debemos introducir la noción de ciclos.
Definición: Un ciclo es la unión de caminos cerrados. Esto es sean $\{\gamma_i\}_{i=1}^n$ caminos cerrados definimos el ciclo $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$.

Podemos ahora extender la noción de integral de línea en un ciclo por linealidad:

$$\int_\Gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^n \int_{\gamma_i} f(z)dz.$$

Por supuesto que hay una extensión inmediata de la definición de índice a ciclos.

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(a).$$

Si $a \notin \Gamma^* = (\cap\gamma_i^*)$ (hemos denotado por simplicidad γ^* al conjunto $\gamma([a,b])$) en las notas se demuestra el siguiente teorema

Teorema de Cauchy global. Sea Ω un abierto cualquiera de $\mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega)$. Sea Γ un ciclo en Ω tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$ para todo $a \notin \Omega$. Entonces para todo $z \in \Omega - \Gamma^*$ se cumple:

- $\int_\Gamma f(z)dz = 0.$
- $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$

Observación: Si Ω es convexo este teorema es una generalización por linealidad del teorema similar demostrado para caminos cerrados.

Funciones Meromorfas y Teorema de los residuos.

Comenzaremos con una definición.
Definición: Una función f es meromorfa en un abierto Ω si existe un subconjunto $A \subset \Omega$ tal que:

1. A no tiene puntos de acumulación en Ω
2. $f \in H(\Omega - A)$
3. Los puntos de A son polos de f.

Si $A = \phi$ entonces $f \in H(\Omega)$.

Ejemplo 1: Sea $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un polinomio. Y definamos $f(z) = \frac{1}{P(z)}$. Entonces tenemos que f es meromorfa y el conjunto A está constituido por las raíces de P.

Ejemplo 2: Si Q y P son dos polinomios cuyas raíces son diferentes y el grado de Q es menor o igual a P entonces la fracción racional $\frac{Q(z)}{P(z)}$, es meromorfa y el conjunto A tiene como elementos las raíces de P.

Si f tiene un polo en a entonces existen constantes $C_1(a), \ldots, C_m(a)$ con $C_m(a) \neq 0$ tales que la función

$$g(z) = f(z) - \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i(a)}{(z-a)^i},$$

tiene una singularidad evitable en $z = a$. A la función $Q(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{C_i(a)}{(z-a)^i}$ se le llama parte principal asociada a a.

Como la función g puede ser extendida a una función analítica en un pequeño circulo que contiene a a y dado que las funciones $\frac{1}{(z-a)^m}$ tienen primitiva para $m > 1$ se tiene entonces que

$$\int_{\gamma} g(z)dz = 0$$

y por lo tanto

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i C_1(a) \mathrm{Ind}_{\gamma}(a).$$

Este resultado puede ser generalizado como lo muestra el siguiente teorema.

Teorema de los residuos. Sea f meromorfa en Ω, $f \in H(\Omega - A)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega - A$ tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0 \, \forall a \notin \Omega$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z) dz = \sum_{a \in A} C_1(a) \mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$

Demostración: Recordemos en primer lugar $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0$ para a perteneciente a la componente no acotada de Ω. Lo que significa que el conjunto de puntos de Ω que verifica $\mathrm{Ind}_\Gamma(\xi) \neq 0$ es acotado y cuya clausura está contenida en Ω.

Como A no tiene puntos de acumulación cualquier parte de ese conjunto contenida en un compacto tiene un número finito de elementos. Sean entonces $a_1 \ldots, a_n$ los puntos de A que tienen índice diferente de cero. Consideremos $\{Q_i\}_{i=1}^n$ las partes principales en esos polos. Se tiene entonces que $g = f - \sum_{i=1}^n Q_i$ tiene singularidades evitables en los a_i. Por lo tanto $g \in H(\Omega - (A - \{a_1, \ldots, a_n\}))$. Si aplicamos el Teorema de Cauchy global se tiene que $\int_\Gamma g(z)dz = 0$ de lo cual

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_\Gamma \sum_{i=1}^n Q_i(z)dz = 2\pi i \sum_{i=1}^n \mathrm{Ind}_\Gamma(a_i) C_1(a_i).$$

Calculo de los residuos y aplicaciones.
Para aplicar el resultado anterior necesitamos un algoritmo que nos permita: en primer lugar determinar los polos a_i y su orden y además calcular $C_1(a_i)$. Ya hemos visto que para determinar el orden del polos a basta con encontrar un $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) \text{ sea distinto de cero y de infinito.}$$

Una vez calculado el orden del polo sabemos que $f - \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{(z-a)^i}$ posee una singularidad evitable en a.

Luego puede ser extendida a una función G holomorfa. Así

$$f(z) = G(z) + \sum_{i=1}^{m} \frac{c_i}{(z-a)^i},$$

multiplicando ambos lados de la igualdad por $(z-a)^m$ obtenemos

$$(z-a)^m f(z) = (z-a)^m G(z) + \sum_{i=1}^{m} c_i (z-a)^{m-i},$$

derivando $m-1$ veces a ambos lados con respecto a z obtenemos

$$\frac{\partial^{m-1}}{\partial^{m-1}z}[(z-a)^m f(z)] = \frac{\partial^{m-1}}{\partial^{m-1}z}[(z-a)^m G(z)] + (m-1)!c_1.$$

El primer término de la derecha es una suma que tiene siempre en sus términos alguna potencia de $z-a$, luego tiende a cero cuando $z \to a$. De esto se desprende que

$$\lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial^{m-1}z}[(z-a)^m f(z)] = c_1.$$

Hemos así obtenido un algoritmo para calcular el orden y la constante c_1 para un polo de una función.
Ilustraremos con un ejemplo muy simple.
Ejemplo: Consideremos la función $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$. Sabemos que la función tiene dos polos i y $-i$, los puntos que anulan el denominador de la fracción. Veamos que i es un polo de orden dos.

$$\lim_{z\to i}(z-i)^2 f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)^2}{(z^2+1)^2} = \lim_{z\to i}\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(2i)^2} \neq 0.$$

Por otra parte

$$c_1(i) = \lim_{z\to i} \frac{\partial}{\partial z}[(z-i)^2 f(z)] = \lim_{z\to i} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(z+i)^2} = -\frac{2}{(2i)^3}.$$

Las constantes $c_1(a)$ se llaman residuos de la función f en el polo a.

Ejemplo: Consideremos la función racional $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ el numerador y el denominador analíticas en Ω y para $a \in \Omega$ supongamos que $g(a) \neq 0$ y $h(a) = 0$, pero $h'(a) \neq 0$. Escribamos $h(z) = (z-a)h_1(z)$ entonces $h'(z) = h_1(z) + (z-a)h_1'(z)$ luego $h_1(a) = h'(a) \neq 0$.

De esta manera tenemos

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\frac{g(a)}{h_1(a)}\overset{0}{\neq\infty}\,.$$

El polo es de orden uno. Así tenemos

$$\text{Res } f(a)=c_1=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\frac{g(a)}{h_1(a)}=\frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Ejemplo: Sea la función $f(z)=\frac{z^3+2}{z^4+1}$. Esta función tiene cuatro polos los cuales son les raíces cuartas de -1 esto es $a_k=e^{i\frac{\pi k}{4}}$ para $k=1,2,3,4$.

De esta manera podemos escribir

$$f(z) = \frac{z^3 + 2}{(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)(z - a_4)}.$$

y Res $f(a_1) = \frac{a_1^3+2}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_1-a_4)}$ e igual para los otros polos. Para calcular los residuos calculamos $\frac{g(z)}{h'(z)} = \frac{z^3+2}{4z^3}$. Entonces

$$\text{Res } f(a_k) = \frac{a_k^3 + 2}{4a_k^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2a_k^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\bar{a}_k^3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\bar{a}_k^4 a_k = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}a_k$$

Sea ahora la circunferencia $S(0,2)$ que se escribe $\gamma(t) = 2e^{i2\pi t}$ todos los polos se encuentran en el interior de la anterior circunferencia. Aplicando el teorema del residuo

$$\int_\gamma (\frac{z^3+2}{z^4+1})dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{4} (\frac{1}{4} - \frac{1}{2} a_k) = 2\pi i.$$