# Clase No. 5 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

**Integrales de línea.**
Un camino es una curva continuamente diferenciable a trozos. Esto es, si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es un camino existen puntos $a = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = b$ tal que $\gamma'$ es continua en $(s_j, s_{j+1})$ y existen $\lim_{t \to s_j^+} \gamma'(t)$ y $\lim_{t \to s_{j+1}^-} \gamma'(t)$.

**Observación.** Un camino es una función, sin embargo por abuso de lenguaje a veces se dice que el camino es su recorrido $\gamma([a, b])$.

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que está definida en $\gamma([a, b])$. Se define la integral de $f$ sobre el camino $\gamma$ de la manera siguiente

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Si denotamos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ y $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$, entonces

$$\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$
$$= \int_a^b [u(\gamma_1(t),\gamma_2(t)) + iv(\gamma_1(t),\gamma_2(t))](\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))dt$$
$$= \int_a^b [(u\gamma_1' - v\gamma_2') + i(u\gamma_2' + v\gamma_1')]dt.$$

Observemos que las funciones que integramos tienen un número finito de puntos de discontinuidad, por tanto son integrables.

La noción de equivalencia es importante. Un camino $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ es equivalente al camino $\gamma_1 : [a', b'] \to \mathbb{C}$ si existe una función diferenciable $\varphi : [a', b'] \to [a, b]$ con $\varphi' \neq 0$, $\varphi(a') = a, \varphi(b') = b$ y $\gamma_1 = \gamma \circ \varphi$.
La noción de integral se preserva bajo caminos equivalentes. En efecto si hacemos el cambio de variable $s = \varphi(t)$

$$\int_a^b f(\gamma_1(s))\gamma_1'(s)ds = \int_a^b f(\gamma_1(\varphi(t)))\gamma_1'(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$
$$= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Algunas propiedades de la integral de línea. En primer lugar denotemos por $\gamma_2\gamma_1$ la concatenación de dos curvas, siempre que $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$

1. $\int_\gamma (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_\gamma f(z)dz + \beta\alpha \int_\gamma g(z)dz$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
2. $\int_{\gamma_2\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz$.
3. $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$, donde $-\gamma(t) = \gamma(a+b-t)$.
4. $|\int_\gamma f(z)dz| \leq \int_a^b |f(\gamma(t))\gamma'(t)|dt$
5. $|\int_\gamma f(z)dz| \leq ||f||_\infty Long(\gamma)$, aquí $Long(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$.

Las tres primeras propiedades son inmediatas, la quinta se obtiene de la cuarta al usar $|f(\gamma(t))\gamma'(t)| \leq ||f||_\infty|\gamma'(t)|$. Para demostrar la cuarta sólo hay que proceder como en las notas y denotar $I = \int_\gamma f(z)dz$. Escribir entonces $I = |I|e^{i\theta}$. Luego $|I| = Ie^{-i\theta}$. Así

$$|I| = e^{-i\theta}\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Como el término de la izquierda es real y positivo se verifica

$$|I| = \int_a^b \Re[e^{-i\theta}f(\gamma(t))\gamma'(t)]dt \leq \int_a^b |f(\gamma(t)||\gamma'(t)|dt.$$

Sea $f(z) = z^n$ y consideremos el $\gamma(t) = e^{it}$ para $t \in [0, 2\pi]$. Así

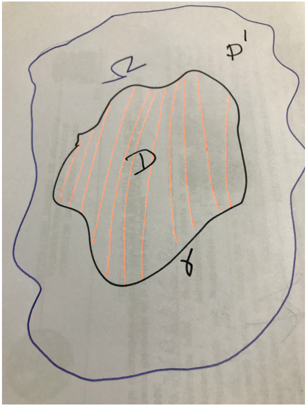
$$\int_\gamma f(z)dz = i\int_0^{2\pi} e^{int}e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = \frac{e^{i(n+1)t}}{n+1}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Otro ejemplo es $f(z) = \frac{1}{z}$

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = i\int_0^1 e^{-it}e^{it}dt = 2\pi i$$

**Teorema de Cauchy.**

Antes de continuar diremos que un camino es cerrado cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$ y supondremos que no existen puntos dobles esto puntos $t_1,\ t_2 \in (a, b)$ tales que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Un camino cerrado divide al plano en dos regiones $D$ y $D'$ una acotada la interior y la no acotada. La figura siguiente bosqueja esta situación.




La figura muestra las dos regiones del plano complejo que crea el camino $\gamma$.

Vamos a demostrar el Teorema de Cauchy.

**Teorema**

*Sea $f \in H(\Omega)$ y $\gamma([0,1] \subset \Omega$ un camino cerrado y simple. Supongamos que $D \subset \Omega$. Entonces*

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

**Demostración:** Escribamos $\gamma(t) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t)$. Entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))dt$$

$$= \int_0^1 (if\gamma_2' - (-f\gamma_1'))dt.$$

La extensión a campos vectoriales que toman valores complejos del Teorema de Green nos dice que si $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ con $f_i : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con $i = 1, 2$ y es diferenciable entonces

$$\int\int_D \text{div } \mathbf{f} dxdy = \int_D (\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y})dxdy = \int_0^1 (f_1\gamma_2' - f_2\gamma_1')dt.$$

Ahora si tomamos $(f_1, f_2) = (if, -f)$ entonces

$$\int\int_D (\frac{i\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y})dxdy = \int_0^1 (if\gamma_2' - (-f\gamma_1'))dt.$$

Pero se tiene

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

y

$$f'(z) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(z+i\varepsilon) - f(z)}{i\varepsilon} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Obtenemos

$$\frac{i\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

y por consecuencia

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_0^1 (if\gamma_2' - (-f\gamma_1'))dt = 0.$$