Clase No. 2 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

En este curso estudiaremos las funciones de variable compleja a valores complejos es decir $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ejemplos de tales funciones son $f(z) = z^n$, $g(z) = \bar{z}$, $P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ polinomio de grado n, etc.

Como $\mathbb{C}$ con la distancia d es un espacio vectorial complejo con la métrica $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. Podemos introducir las nociones de límite y de continuidad.

Diremos que una función f tiene un límite ℓ cuando $z \to z_0$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $|z - z_0| < \delta$ se tiene que $|f(z) - \ell| < \varepsilon$. Escribiremos $\lim_{z \to z_0} f(z) = \ell$.

Decimos que f es continua en z_0 si está definida en z_0 y además $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$. La noción de límite nos permite introducir la derivada de una función f.

Diremos que f es holomorfa o analítica en un conjunto abierto Ω del plano complejo (notemos que Ω abierto significa que para todo punto $z_0 \in \Omega$ existe un disco abierto $D(z,r) \subset \Omega$) si para todo $z \in \Omega$ existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

independientemente de la forma como nos acercamos a z_0.

Veamos algunos ejemplos.
1.- Sea $f(z) = z^n$, $n \geq 1$ demostremos que es holomorfa en todo punto del plano. Sea z_0 cualquier complejo

$$\lim_{z \to z_0} \frac{(z^n - z_0^n)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = n z_0^{n-1}.$$

2.- Sea la función $g(z) = \overline{z}$ veamos que no tiene derivada en ningún punto.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{z}_0 + \overline{h} - \overline{z}_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}}{h} = e^{-i2\theta}.$$

Hemos escrito $h = |h| e^{i\theta}$ y θ representa la dirección como por la que nos acercamos a z_0. El límite depende de la dirección por tanto la derivada no existe en punto alguno.

3.- Sea el conjunto $\Omega = \mathbb{C} - 0$ y definamos $f : \Omega \to \mathbb{C}$ por $f(w) = \frac{1}{w}$. Podemos calcular

$$(\frac{1}{w})' = \frac{\frac{1}{w+h} - \frac{1}{w}}{h} = \frac{1}{h}\frac{w - w - h}{(w+h)w} \to -\frac{1}{w^2}.$$

4.- Este ejemplo es importante para el curso, por esta razón lo desarrollaremos con cuidado. Consideremos una función definida a través de una serie de potencias $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ con radio de convergencia R. Queremos calcular la derivada por definición, esto es

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\sum_{n=0}^{\infty} c_n[(z+h)^n - z^n)]) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(\sum_{k=1}^{\infty} c_n \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^j).$$

Si estuviera justificado intercambiar el símbolo de la suma con el límite podríamos calcular el límite de cada término en la serie y así obtener

$$\lim_{h\to 0} c_n \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-1} = nc_n z^{n-1},$$

entonces el resultado final sería

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}.$$

Debemos demostrar varias cosas. En primer lugar que la serie anterior converge uniformemente dentro del disco $D(0,R)$ y la convergencia es uniforme en cualquier disco interior cerrado. Luego debemos demostrar que en efecto esta serie es la derivada de la función f. Adicionalmente, demostraremos que la función es diferenciable infinita veces.

Comencemos señalando que se cumple $\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$. En efecto tomando logaritmo de la sucesión se tiene $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log n = 0$ y de ahí el resultado. Como la serie original tiene radio de convergencia R entonces tenemos

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} (c_n)^{-\frac{1}{n}},$$

entonces

$$\limsup_{n\to\infty} (nc_n)^{-\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} (c_n)^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{R}.$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ es también una serie de potencias con coeficientes $(n+1)c_{n+1}$, luego el cálculo anterior nos dice que esta serie tiene el mismo radio de convergencia que la original, por consecuencia converge en el interior de $D(0, R)$ y es uniformemente convergente en cualquier disco cerrado interior a $D(0, R)$.

Consideremos ahora un punto $z \in D(0,R)$ y h tal que $D[z,|h|] \subset D(0,R)$. Entonces existe un $R_1 < R$ tal que $D[z,|h|] \subset D[0,R_1]$ y

$$|\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-1} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1}| = |h \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-2}|,$$

pero

$$|h|| \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-2}| = |h|| \sum_{m=0}^{n-2} \binom{n}{m+2} z^{n-j} h^{m}|$$

$$\leq |h| n(n-1)| \sum_{m=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{(m+2)!(n-2-m)!} z^{n-j} h^{m}|$$
$$= |h| n(n-1)(|z|+|h|)^{n-2}.$$

Supongamos que también tenemos que $2R_1 < R$. Entonces

$$|h\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j} h^{j-2}| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|c_n|(2R_1)^{n-2}$$

$$\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(\frac{2R_1}{R})^{n-2} \to 0.$$

El procedimiento que hemos desarrollado se adapta bien a la función f' y de esta manera se itera el procedimiento por inducción y se demuestra que la función tiene infinitas derivadas.

Antes de proceder con el siguiente ejemplo veamos una manera fácil de calcular derivadas usando las nociones aprendidas en CDIVV.

Proposición. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tiene derivada en $z \in \Omega$ y si escribimos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ entonces:

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = v_y(x, y) - iu_y(x, y).$$

Demostración:

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

$$= \frac{((u(x+h_1, y+h_2) - u(x, y)) + i(v(x+h_1, y+h_2) - v(x, y)))\overline{h}}{|h|^2}.$$

Tomemos $h = (h_1, 0)$ tenemos tomando límite

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y).$$

Para demostrar la validez del segundo término de la igualdad ponemos $h = (0, h_2)$.
Ahora bien una vez demostrada esta proposición podemos extraer una consecuencia más que caracteriza a las coordenadas de una función holomorfa. En efecto el calculo anterior nos permite concluir la existencia de las derivadas parciales de las coordenadas.

Por lo que hemos visto anteriormente el hecho de la existencia de las derivadas sucesivas nos dice que las funciones coordenadas son continuamente diferenciables de esta manera se tiene, usando el desarrollo de Taylor de primer orden que

$$u(x+h_1, y+h_2) - u(x,y) = u_x(x,y)h_1 + u_y(x,y)h_2 + o(h_1^2 + h_2^2),$$

$$v(x+h_1, y+h_2) - v(x,y) = v_x(x,y)h_1 + v_y(x,y)h_2 + o(h_1^2 + h_2^2),$$

la notación $o(\varepsilon)$ indica un término que tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$.

Consideremos entonces

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

$$= \frac{1}{|h|^2}\big((u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y))+i(v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y))\big)\overline{h}$$

$$= \frac{1}{|h|^2}\big((u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y))h_1+(v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y))h_2$$

$$+i(-(u(x+h_1,y+h_2)-u(x,y))h_2+(v(x+h_1,y+h_2)-v(x,y)))h_1\big)$$

$$= \frac{1}{|h|^2}\big[(u_x h_1 + u_y h_2)h_1 + (v_x h_1 + v_y h_2)h_2 + i(-(u_x h_1 + u_y h_2)h_2$$

$$+(v_x h_1 + v_y h_2)h_1) + o(|h|^2)\big].$$

Para que exista el límite es necesario que $v_y = u_x$ y $v_x = -u_y$ y substituyendo nos queda

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} \to u_x(x,y) + iu_y(x,y).$$

Las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x, \end{aligned}$$

Reciben el nombre de ecuaciones de Cauchy-Riemann.

5.- En este ejemplo consideremos el conjunto $\Omega = \mathbb{C} - \{z = x + 0i : x \in \mathbb{R}\, x \leq 0\}$ y definamos para $z \in \Omega$ la parte principal del logaritmo complejo por $\log z = \log |z| + i\theta$ cuando θ es el ángulo tal que $z = |z|e^{i\theta}$. La definición de Ω implica que $|z| > 0$ y $\theta \in [0, 2\pi)$. De esta forma tenemos

$$\log z = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) + i\tan^{-1}(\frac{y}{x}).$$

Luego

$$(\log z)' = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{z}.$$

Al conjuntos de las funciones holomorfas en la región Ω lo denotaremos por $H(\Omega)$. Para nosotros una región será un subconjunto conexo y abierto del plano complejo. Podemos ahora demostrar la versión holomorfa de la regla de la cadena. Sea $f \in H(\Omega)$ y supongamos además que $f(\Omega) \subset \Omega_1$, si $g \in H(\Omega_1)$ entonces podemos definir $l = g \circ f$. Es decir $l : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que si $z \in \Omega$ se tiene $l(z) = g(f(z))$. Podemos demostrar la siguiente propiedad bajo las condiciones anteriores $l \in H(\Omega)$ y además

$$l'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

$$\frac{l(z+h)-l(z)}{h}=\frac{g(f(z+h))-g(f(z))}{f(z+h)-f(z)}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}.$$

Pero por ser f holomorfa $f(z+h)-f(z)=[f'(z)+\varepsilon(z,h)]h$ donde $\varepsilon(z,h)\to 0$ cuando $h\to 0$. Por otra parte pongamos $w=f(z)$ entonces $f(z+h)=w+(f(z+h)-f(z))$

$$g(f(z+h))-g(f(z))=g(w+(f(z+h)-f(z)))-g(w)$$

$$=[g'(w)+\eta(w,h)](f(z+h)-f(z)),$$

aquí también $\eta(w,h)\to 0$ cuando $h\to 0$.

Substituyendo en el cociente se verifica

$$\frac{l(z+h)-l(z)}{h}$$

$$= [g'(w)+\eta(w,h)][f'(z)+\varepsilon(z,h)] \to g'(w)f'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

Finalizaremos la clase elaborando una relación interesante entre las series de Fourier y las funciones holomorfas definidas en el disco $D(0,1)$. Sea $f : S(0,1) \to \mathbb{R}$. Además supondremos que es una función diferenciable a trozos. Sabemos que la función puede ser desarrollada en serie de Fourier

$$f(\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}(n)e^{in\theta}.$$

Para determinar los coeficientes basta con multiplicar por $e^{-ik\theta}$ a ambos lados de la ecuación, integrar y usar que

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\theta} d\theta = 0 \quad n \neq k \text{ y } 2\pi \text{ si } n = k.$$

Así obtenemos

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} d\theta.$$

De aquí se desprende

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}(-n) e^{-in\theta} := f_1(\theta) + f_2(\theta).$$

Como la función es continua y diferenciable a trozos es acotada y definimos $||f||_\infty = \sup_\theta |f(\theta)|$.

Con estos elementos podemos definir la función holomorfa prolongación al interior del disco de f_1 de la siguiente manera

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{f}(n) z^n,$$

es inmediato demostrar que $|\hat{f}_1(n)| \leq ||f||_\infty$ luego la serie de potencias que define la función extensión converge al menos para $|z| < 1$, lo que nos dice que su radio de convergencia es al menos 1. Por lo que hemos visto esta función es holomorfa en el interior $D(0,1)$ y por la definición coincide con $f_1(\theta)$ en la frontera. Volveremos luego con este ejemplo y sus aplicaciones.