Clase No. 14 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Desarrollo de Laurent

Desarrollo de Laurent.
En esta última clase mostraremos el desarrollo de Laurent de una función holomorfa en la corona centrada en 0 y de radios R_1 y R_2 esto es el conjunto siguiente

$$C(0, R_1, R_2) = \{z \in \mathbb{C};\ R_1 < |z| < R_2\}.$$

Aunque consideramos el centro de la corona el origen, el desarrollo que haremos se extiende sin dificultad a coronas centradas en $z_0 \in \mathbb{C}$.

Consideremos las series convergentes

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \text{ para } |z| < R_2,$$

y además

$$f_2(z) = \sum_{n<0} a_n z^n, \text{ para } |z| > R_1.$$

Sabemos que f_1 es holomorfa en $D(0, R_2)$. Demostraremos ahora que f_2 es holomorfa en $|z| > R_1$.

Pongamos $u = \frac{1}{z}$

$$g(u) = f_2(z) = \sum_{n>0} a_{-n} z^{-n} = \sum_{n>0} a_{-} n u^n.$$

La función g es holomorfa para $|u| < \frac{1}{R_1}$ en vista de la convergencia de la serie que define f_2.
Además tenemos

$$g'(u) = \sum_{n>0} n a_{-n} u^{n-1}.$$

Ahora bien $f_2(z) = g(\frac{1}{z})$ y luego el teorema de la derivada de la función compuesta nos permite deducir que

$$f_2'(z) = -\frac{1}{z^2} g'(\frac{1}{z}) = \sum_{n<0} n a_{-n} z^{n-1}.$$

Como tenemos que $R_1 < R_2$ entonces la función

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

es holomorfa para $R_1 < |z| < R_2$ y la convergencia de la serie es uniforme para $R_1 < r_1 \leq |z| \leq r_2 < R_2$.

La serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ recibe el nombre de serie de Laurent en la corona $C(0, R_1, R_2)$.

Definición. Diremos que una función f definida en $C(0, R_1, R_2)$ es desarrollable en serie de Laurent si existe una serie

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

tal que la serie en la corona es convergente y se tiene

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Por la introducción hemos visto que si f es desarrollable en serie de Laurent entonces es analítica en la corona $C(0, R_1, R_2)$.

Sabemos que la convergencia es uniforme en cualquier corona $C(0, r_1, r_2)$ para $R_1 < r_1 \leq |z| \leq r_2 < R_2$. Demostraremos en primer lugar que si la serie de Laurent existe es única. Escribamos para $z = re^{it}$ para $r_1 \leq r \leq r_2$. Consideremos que f se desarrolla en serie de Laurent

$$f(re^{it}) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{int}.$$

Pero $\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = 2\pi\delta_{n,m}$.

De esta manera multiplicando la fórmula que define f a ambos lados por e^{-imt} e integrando obtenemos

$$a_m r^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-imt} f(re^{it}) dt.$$

Lo que nos otorga la unicidad de los coeficientes. Podemos ahora demostrar el siguiente teorema.

Teorema. Toda función holomorfa en la corona $C(0, R_1, R_2)$ se puede desarrollar en serie de Laurent.

Demostración. Vamos a demostrar que para r_1 y r_2 existe una serie de Laurent que converge a f y que esta serie será única. Consideremos $R_1 < r_1 < r_1' < r_2' < r_2 < R_2$. Y la corona compacta

$$r_1' \leq |z| \leq r_2'.$$

Consideremos el camino conformado por $\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2$. Recorremos $\gamma_2 = r_2' e^{it}$ en sentido contrario a las agujas del reloj y $\gamma_1 = r_1' e^{it}$ en el sentido horario. así si aplicamos la fórmula de Cauchy obtenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Para $|z| < r_2'$ tenemos $\frac{|z|}{r_2'} < 1$ y para $r_1' < |z|$ entonces $\frac{r_2'}{|z|} < 1$ de esta manera obtenemos que los siguientes desarrollos son uniformemente convergentes

$$\frac{1}{\zeta}\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}},\ |z| < |\zeta| = r_2',$$

y además

$$\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{\zeta}{z}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}},\ |z| > |\zeta| = r_1',$$

haciendo cambio de índices la última serie se escribe $-\sum_{n<0} \frac{z^n}{\zeta^{(n+1)}}$.

Como las series son uniformemente convergentes tenemos que las podemos integrar termino a término y así

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \sum_{n<0} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

De este resultado se desprende que

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,\ n \geq 0,$$

y

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,\ n < 0.$$

Podemos ahora trasladar nuestro resultado a la corona $C(z_0, R_1, R_2)$. Suponemos entonces g holomorfa en $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

$$z \Rightarrow z + z_0 \Rightarrow g(z + z_0) = f(z).$$

Definimos $f(z) = g(z + z_0)$, así transformamos $\gamma_1 = D(0, R_1)$ y $\gamma_2 = D(0, R_2)$ en $\tilde{\gamma}_1 = D(z_0, R_1)$ y $\tilde{\gamma}_2 = D(z_0, R_2)$ respectivamente. Luego si usamos la fórmula se tiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \sum_{n<0} z^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

De donde
$g(u) = f(u - z_0)$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (u - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \sum_{n<0} (u - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta.$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (u - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{g(\zeta + z_0)}{\zeta^{n+1}} d\zeta + \sum_{n<0} (u - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{g(\zeta + z_0)}{\zeta^{n+1}} d\zeta$$

$$
\begin{aligned}
g(u) = \sum_{n=0}^{\infty}(u - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_2} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\
+ \sum_{n<0}(u - z_0)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_1} \frac{g(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.
\end{aligned}
$$