Clase No. 13 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Principio del argumento

Principio del argumento.
Antes de comenzar consideremos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) > 0$ para todo x. Consideremos la derivada logarítmica de f como la derivada de la función $F(x) = \log f(x)$ esto es $\varphi(x) := F'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$. De esta forma tenemos

$$\int_a^b \varphi(u)du = \log f(b) - \log f(a) = \log \frac{f(b)}{f(a)}.$$

El principio del argumento tiene que ver con la función $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ que llamamos de nuevo la derivada logarítmica de $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Comencemos entonces recordando el comportamiento de una función holomorfa en un abierto conexo Ω del plano. Si $f \in H(\Omega)$ tiene un cero en $a \in \Omega$, esto es $f(a) = 0$, entonces existe un disco $D(a, r)$ tal que $f(z) = (z - a)^m h(z)$ para todo $z \in D(a, r)$ y además con $h(z) \neq 0$ en ese disco.
El natural m recibe el nombre de orden del cero de f. Vamos a demostrar el siguiente teorema

Teorema. (*Principio del argumento para funciones holomorfas*). Sea γ un camino cerrado contenido en Ω subconjunto abierto y conexo. Tal que $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Supongamos además que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ solo puede tomar los valores 0 y 1 y definamos $\Omega_1 = \{z \in \Omega : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1\}$. Sea $f \in H(\Omega)$, no nula y N_f el número de ceros de f en Ω_1 contados según su multiplicidad. Si f no tiene ceros sobre $\gamma([0, 2\pi])$ entonces

$$N_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0).$$

Demostración: Definamos $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ y supongamos que f tiene un cero de orden m en a. Así que $f(z) = (z-a)^m h(z)$ en $D(a,r)$ luego $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{(z-a)^m h(z)}$, pero
$f'(z) = m(z-a)^{m-1} + (z-a)^m h'(z)$, entonces

$$\varphi(z) = \frac{m}{(z-a)} + \frac{h'(z)}{h(z)},$$

como $h(z)$ no se hace cero a resulta ser un polo para φ y se tiene también $C_1(a) = \mathrm{Res}(\varphi, a) = m$.

Por otro lado es claro que si φ tiene un polo en a entonces f tiene un cero en a. Por lo tanto

$$a \text{ es polo de } \varphi \Leftrightarrow a \text{ es cero de } f.$$

Como los ceros de f no se pueden acumular entonces los polos de φ no se pueden acumular lo que implica que φ es una función meromorfa. Por el teorema de los residuos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)dz &= \sum_{a \in \text{polo de } \varphi} \operatorname{Ind}_\gamma(a) \operatorname{Res}(\varphi, a) \\ &= \sum_{a \in \text{polo de } \varphi} m_a = \sum_{a \in \text{cero de } f} m_a = N_f.\end{aligned}$$

Donde m_a es el orden del cero de f en a.

Por otra parte tenemos.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma(t))}{f(\gamma(t))}\gamma'(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{f\circ\gamma} \frac{1}{z}dz = \mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0).\end{aligned}$$

Ejemplo. Sea $n > 0, \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ y sea $f(z) = \frac{z^{n-1}}{z^n+a^n}$. Demostrar que f es meromorfa en $\mathbb{C}$ y para $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ mostrar que

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & \text{si } R < a \\ 2\pi i & \text{si } R > a \end{cases}$$

Para demostrar la primera parte tenemos que para los puntos que no son ceros del denominador la función es holomorfa al ser cociente de dos funciones holomorfas. Si por otra parte se tiene que si $z_0^n + a^n = 0$, se tiene que $\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$ lo que implica que es un polo. La función es por tanto meromorfa. Para la segunda parte si definimos $h(z) = z^n + a^n$ entonces tenemos que $h'(z) = nz^{n-1}$ luego $f(z) = \frac{h'(z)}{nh(z)}$.

Por el principio del argumento se tiene

$$\frac{1}{n}N_h = \frac{1}{2\pi i n}\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}dz,$$

aquí N_h es el número de ceros de h en el conjunto dentro de γ.
Ahora bien $R < a$ no hay ceros de h y si $R > a$ hay exactamente n ceros.
Podemos ahora generalizar el principio del argumento a funciones meromorfas.

Teorema. (*Principio del argumento para funciones meromorfas.*) Sea γ un camino cerrado contenido en Ω subconjunto abierto y conexo. Tal que $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Supongamos además que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ solo puede tomar los valores 0 y 1 y definamos $\Omega_1 = \{z \in \Omega : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1\}$. Sea f meromorfa, no nula y N_f el número de ceros de f en Ω_1 contados según su multiplicidad y P_f el número de polos. Si f no tiene ceros ni polos sobre $\gamma([0, 2\pi])$ entonces

$$N_f - P_f = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \mathrm{Ind}_{f \circ \gamma}(0).$$

Demostración: Sea de nuevo $\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ y supongamos que f tiene un polo de orden m en a por tanto existe un disco $D(a, r)$ tal que $f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$ con $h(z) \neq 0$ para $z \in D(a, r)$ y $h \in H(D(a, r))$. Podemos derivar

$$f'(z) = \frac{h'(z)}{(z-a)^m} - \frac{mh(z)}{(z-a)^{m+1}},$$

de esa manera obtenemos

$$\varphi(z) = \frac{h'(z)}{h(z)} - \frac{m}{z-a},$$

pero como $h'(z) \neq 0$ entonces $\frac{h'}{h}$ es holomorfa y $C_1(a) = \text{Res}(\varphi, a) = -m$.

Por otro lado si φ tiene un polo en $z = a$ entonces f tiene un 0 a un polo en $z = a$ y como ambos conjuntos no acumulan φ es meromorfa en Ω. De esto obtenemos

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \varphi(z)dz = \sum_{a \in \text{polo de } \varphi} \text{Ind}_\gamma(a) \text{ Res }(\varphi, a)$$

$$= \sum_{a \in \text{cero de } f} \text{Ind}_\gamma(a) \text{ Res }(\varphi, a) + \sum_{a \in \text{polo de } f} \text{Ind}_\gamma(a) \text{ Res }(\varphi, a)$$

$$= N_f - P_f$$

Por último como antes demostramos que

$$\mathrm{Ind}_{f\circ\gamma}(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz.$$

Demostraremos ahora el

Teorema de Rouche. Sea γ un camino cerrado contenido en Ω subconjunto abierto y conexo. Tal que $\mathrm{Ind}_\gamma(a) = 0$, $\forall a \notin \Omega$. Supongamos además que $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ solo puede tomar los valores 0 y 1 y definamos $\Omega_1 = \{z \in \Omega : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 1\}$. Sea $f \in H(\Omega)$, no nula y N_f el número de ceros de f en Ω_1 contados según su multiplicidad y que no se anula en $\gamma([0,2\pi])$. Si $g \in H(\Omega)$ satisface $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \gamma([0,2\pi])$ entonces $N_f = N_g$.

Demostración: Debemos observar que como f no tiene ceros en $\gamma([0, 2\pi])$. entonces la hipótesis garantiza que g no tiene ceros allí tampoco. Definamos las dos curvas $\gamma_1(t) = f(\gamma(t))$ y $\gamma_0(t) = g(\gamma(t))$. Así

$$|\gamma_1(t) - \gamma_0(t)| < |\gamma_1(t)|.$$

Por un lema demostrado antes se tiene que $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(a) = \mathrm{ind}_{\gamma_0}$ y de esta igualdad se obtiene el resultado.

Ejemplo: Sea α un número real y $\alpha > 1$. Consideremos la función $f(z) = ze^{\alpha - z} - 1$. Demostrar

1. f tiene exactamente un cero en $\{z :\in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.
2. Demostrar que el cero conseguido antes es un número real,

Definamos $F(z) = ze^{\alpha - z}$ y $G(z) = ze^{\alpha - z} - 1$. Entonces consideremos $z \in S(0,1)$. Entonces $|F(z) - G(z)| = 1$ y $|F(z)| = |ze^{\alpha - z}| = |e^{\alpha - z}|$. Escribamos $z = x + iy$, entonces $|e^{\alpha - z}| = e^{\alpha - x} > 1$.

Como $F(0) = 0$ es el único cero de F dentro del disco entonces G tiene un sólo un cero en el disco también. Sea z_0 tal raíz entonces $z_0 e^{\alpha - z_0} - 1 = 0$ y también $\overline{z}_0 e^{\alpha - \overline{z}_0} - 1 = 0$. Lo que implica que $\overline{z}_0$ también es raíz y por la unicidad $z_0 = \overline{z}_0$.