Clase No. 12 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Teorema de los residuos

Calculo de integrales por el método de residuos

Podemos repasar el siguiente teorema dado en la clase anterior.

Teorema de los residuos. Sea f meromorfa en Ω, $f \in H(\Omega - A)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega - A$ tal que $\mathrm{Ind}_\Gamma(a) = 0 \, \forall a \notin \Omega$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(z)dz = \sum_{a \in A} C_1(a) \mathrm{Ind}_\Gamma(a).$$

Vimos en la clase pasada que este teorema permite calcular integrales definidas y en general también impropias en la recta real. Ahora desarrollaremos más esta aplicación.

La aplicación de esta fórmula no es directa debemos dar una serie de recomendaciones que nos permitirán abordar diversos tipos de integrales.

Cálculo de integrales.

1^{er} **tipo.** Consideremos una integral de la forma

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt.$$

Donde R es una función racional que no posee polo en la circunferencia de radio 1 esto es $S(0,1)$.
Escribamos los punto de la circunferencia como $z = e^{it}$ cuando t varía de 0 a 2π.

Así sen $t = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, y $\cos t = \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$ escribiéndolos usando la variable z para el $\sin t$ tenemos $\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$ e igualmente para el $cost$ se tiene $\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$. Además si $z = e^{it}$ entonces $dz = ie^{it}dt$ de lo que concluimos $dt = \frac{1}{iz}dz$. Si usamos el teorema de los residuos tenemos

$$I = \int_{S(0,1)} \frac{1}{iz} R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}))dz$$

$$= 2\pi \sum \text{Res } \frac{1}{z} R(\frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z}), \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})).$$

Ejemplo. Debemos calcular $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$ con $a > 1$. Si hacemos la transformación que indicamos antes tenemos que la fracción racional nos queda.

$$\frac{1}{iz} \frac{1}{a + \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})} = \frac{1}{z} \frac{2z}{z^2 + 2iaz - 1} = \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

De aquí se desprende

$$I = 2\pi i \sum \text{ Res } \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}.$$

Las raíces de $z^2 + 2iaz - 1$ son $z_0 = -i(a - \sqrt{a^2 - 1})$ y $z_1 = -i(a + \sqrt{a^2 - 1})$. El único polo dentro del disco unidad es z_0.

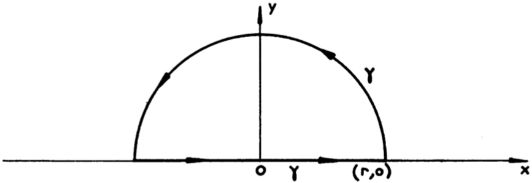
El residuo se calcula fácilmente solo hay que derivar el denominador y así obtener $\frac{1}{z+ia}$ y luego calcular $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{z+ia} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}}$. Entonces $I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$.

2^{do} **tipo.** Ahora vamos a considerar integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx.$$

Aquí R es una función racional que no tiene polos en el eje real. Debemos suponer que la integral es convergente. Esta condición se satisface si por ejemplo la función se comporta cuando $x \to \infty$ como $\frac{1}{|x|^n}$ para $n \geq 1$.

Una condición equivalente es la siguiente $\lim_{|x|\to\infty} xR(x) = 0$.
Para calcular la integral vamos a integrar siguiendo el camino que se ilustra en el siguiente gráfico



Como la función tiene un número finito de polos e integramos sobre el camino compuesto por la media circunferencia $\gamma(t) = re^{it}$ con $0 \leq t \leq \pi$ y la recta $-r \leq x \leq r$.

Para r lo suficientemente grande entonces la función es holomorfa en la circunferencia y la integral sobre la región verificará la fórmula que provee el teorema de los residuos. Entonces

$$\int_{-r}^{r} R(x)dx + \int_{0}^{\pi} R(re^{it})ire^{it}dt = 2\pi i \sum \text{Res } (R(z)).$$

La suma del lado derecho se extiende sobre todos los residuos de los polos contenidos en el semiplano $y > 0$. Si demostramos que cuando $r \to \infty$ la segunda integral del lado izquierdo tiende a cero podemos concluir que

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum \text{Res } (R(z)).$$

Demostremos entonces el hecho señalado

$$|\int_0^{\pi} R(re^{it}) ire^{it} dt| \leq \int_0^{\pi} |R(re^{it})| r dt$$

Por hipótesis tenemos que $\lim_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$ lo que implica $\lim_{r\to\infty} r|R(re^{it})| = 0$, entonces para todo ε existe un K tal que si $r > K$ se tiene $r|R(re^{it})| < \varepsilon$ lo que conlleva

$$|\int_0^{\pi} R(re^{it}) ire^{it} dt| < \varepsilon, \text{ si } r > K$$

y como ε es arbitrario se concluye el resultado.

Ejemplo. Calcular la integral $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^6} dx$. El polinomio $1 + x^6$ tiene seis raíces en el círculo unidad y las que están en el semiplano superior son $\{e^{i\frac{\pi}{6}}, e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{5i\frac{\pi}{6}}\}$, para calcular el residuo en cada polo derivamos el denominador obteniendo que el residuo es en cada una de las raíces $\frac{1}{6z_k^5} = -\frac{z_k}{6}$. De esta forma

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^6} dx = -\frac{\pi}{6}(e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{2}}+e^{5i\frac{\pi}{6}}) = \frac{\pi}{6}(2\sin\frac{\pi}{6}+1) = \frac{\pi}{3}.$$

3^{er} **tipo.** Queremos calcular integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx.$$

Supondremos que f es una función holomorfa en el semiplano superior $y > 0$ salvo quizás en un número finito de puntos. En primer caso consideraremos que los puntos singulares no se encuentran sobre el eje real. En este caso la integral

$$\int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx$$

converge a la integral que deseamos calcular.

Demostraremos la siguiente

Proposición. Si consideramos $z = x + iy$ y tenemos que $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0$ cuando $y \geq 0$, entonces

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum \text{Res}\,(f(z)e^{iz})$$

la suma se efectúa sobre los polos que se encuentran en el semiplano superior.

Observación. Si $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx < \infty$ entonces $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx$ es absolutamente convergente y por consecuencia el enunciado de la proposición cambia y se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ix}dx = 2\pi i \sum \text{Res }(f(z)e^{iz}).$$

Con el señalamiento de que se suma los residuos de los polos del semiplano superior. Pero si la integral es solo condicionalmente convergente la fórmula también se aplica en este caso. Otra observación es que cuando $y > 0$ entonces $|e^{iz}| \leq 1$ lo que nos posibilita a considerar la integral sobre el semiplano superior.

De nuevo usamos como camino de integración el demostrado anteriormente. Solo debemos demostrar que bajo la sola hipótesis $f(z) \to 0$ se tiene el resultado, bajo la hipótesis más fuerte $zf(z) \to 0$ ya lo hemos probado.
Ahora bien tenemos si integramos en la semicircunferencia

$$
\begin{aligned}
\left| \int_0^{\pi} f(re^{it}) e^{re^{it}} ire^{it} dt \right| &\leq M(r) \int_0^{\pi} e^{-r \sin t} r dt \\
&= 2M(r) \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin t} r dt \leq M(r)\pi.
\end{aligned}
$$

La última desigualdad vine de que $e^{-r \sin t} \leq 1$ para $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Y como $M(r) \to 0$ cuando $r \to \infty$ el resultado sigue.

Ejemplo. Calculemos ahora la siguiente integral.

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\Re(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx) = \pi i \sum \text{Res } (\frac{e^{iz}}{1+z^2}).$$

Ahora bien la función solo tiene un polo en el semiplano superior en $z = i$ y para calcular el residuo derivamos el denominador y obtenemos la función $\frac{e^{iz}}{2z}$ la evaluamos en i y obtenemos $\frac{1}{2ei}$ Así se tiene

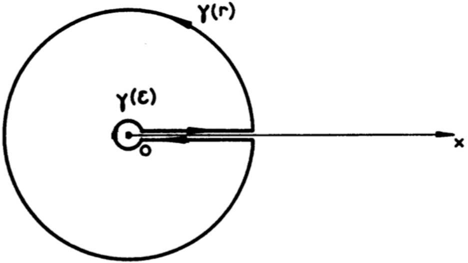
$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2e}.$$

Finalizaré con un tipo de integrales algo más complejas, sin embargo muy útiles en diversos cálculos.
4^{to} **tipo.** Ahora consideraremos integrales de la forma.

$$\int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx,$$

donde R es una función racional tal que $\lim_{x\to\infty} R(x) = 0$, $0 < \alpha < 1$. Para calcular tal integral consideramos la función compleja $f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$ definida en el plano complejo al que hemos extraído el eje real $x \geq 0$. Escogemos el argumento de z definido entre $0 \leq \text{Arg } z \leq 2\pi$.

Seleccionamos para integrar el camino señalado en la figura siguiente.



La circunferencia exterior es re^{it} la interior es εe^{it} y recorremos el eje real desde ε hasta r y luego en sentido inverso de r a ε. Empezamos entonces en ε y allí llegamos a r luego tomamos de $0 \leq t \leq 2\pi$ recorremos re^{it} luego vamos de r a ε por el eje y finalmente recorremos la circunferencia interior εe^{it} de 2π hasta 0. Si denotamos por $\delta(\varepsilon, r)$ al camino completo tenemos

$$\int_{\delta(\varepsilon,r)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = \int_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + (1 - e^{2\pi\alpha}) \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx.$$

Para la primera integral tenemos que $z\frac{R(z)}{z^\alpha} = z^{1-\alpha}R(z)$ y como $R(z) \to 0$ entonces $R(z)$ se comporta asintóticamente con $\frac{1}{z^n}$ para algún $n \geq 1$ y entonces $z\frac{R(z)}{z^\alpha} \to 0$. Por otro lado $|\int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz| \leq \int_0^{2\pi} M(\varepsilon)\varepsilon^{1-\alpha} \to 0$. Solo nos resta explicar el último término Cuando recorremos el eje real de izquierda a derecha tenemos que el argumento de z es 0 y por tanto $z^\alpha = x^\alpha$ en el otro sentido se tiene el argumento es 2π y entonces $z^\alpha = e^{i2\pi\alpha}x^\alpha$. Si denotamos $\to$ y $\leftarrow$ recorrer de izquierda a derecha y viceversa tenemos

$$\int_{\to} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz + \int_{\leftarrow} \frac{R(z)}{z^\alpha} dz = (1 - e^{-i2\pi\alpha}) \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha} dx.$$

Haciendo tender $\varepsilon \to 0$ y $r \to \infty$ y aplicando la fórmula de los residuos obtenemos

$$(1 - e^{-i2\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{R(x)}{x^\alpha} dx = 2\pi i \sum \text{Res}\,(\frac{R(z)}{z^\alpha}).$$

Ejemplo. Calcular $I = \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx$. Hay un solo polo $x = -1 = e^{\pi i}$ y el residuo es $\frac{1}{e^{\pi i \alpha}}$ aplicando la fórmula de arriba se obtiene

$$(1 - e^{-i2\pi\alpha}) \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = 2\pi i \frac{1}{e^{\pi i \alpha}}$$

y despejando

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$