Clase No. 10 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Más sobre el Teorema de Cauchy

Más sobre el Teorema de Cauchy.

El teorema de Cauchy que demostramos se basó en la aplicación del Teorema de Green para campos vectoriales y por tanto los dominios Ω en donde vale son aquellos en los que se puede aplicar este teorema, en principio Ω es abierto y conexo, pero la curva sobre la cual se integra es simple. Nosotros en esta clase buscaremos dilucidar la relación de la demostración que hicimos con el método seguido en las notas. También aprovecharemos para dar una cierta generalización al teorema de Cauchy.

En primer lugar tenemos el siguiente resultado.
Teorema. Sea F una función analítica en Ω (recordemos que este conjunto es abierto y conexo). Tal que $F' = f$ (decimos que f tiene primitiva) entonces se tiene que para todo camino cerrado contenido en Ω

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

Demostración: Sea $\gamma \subset \Omega$ un camino cerrado, entonces

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0.$$

Si además de ser conexo el conjunto Ω es convexo sabemos que dados dos puntos α y z en Ω pueden ser unidos por un segmento $\gamma(t) = (1-t)\alpha + tz$ contenido en Ω. En este caso podemos definir $F(z) = \int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta$. Sea el triángulo formado por los segmentos αz, zz_0 y $z_0\alpha$ que está contenido en Ω luego como podemos aplicar el Teorema de Cauchy tenemos que si vamos de $\alpha \to z$, $z \to z_0$ y $z_0 \to \alpha$ construimos un camino cerrado γ y allí aplicamos nuestro Teorema de Cauchy y tenemos

$$0=\int_\gamma f(\zeta)d\zeta=\int_\alpha^z f(\zeta)d\zeta+\int_z^{z_0} f(\zeta)d\zeta+\int_{z_0}^\alpha f(\zeta)d\zeta$$

Esto es

$$F(z)-F(z_0)=\int_z^{z_0} f(\zeta)d\zeta$$

consideremos el segmento $(1-t)z+tz_0$ entonces podemos escribir la igualdad anterior

$$F(z)-F(z_0)=\int_0^1 f((1-t)z+tz_0)(z-z_0)dt,$$

luego dado que f es continua en z_0 tenemos

$$F'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \int_0^1 f(z_0 + t(z - z_0))dt = f(z_0).$$

Esto implica que si $f \in H(\Omega)$ y Ω es convexo entonces siempre podemos definir $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$ y por consiguiente se tiene que para cualquier camino cerrado no necesariamente simple $\int_\gamma f(z)dz = 0$.
De esta forma hemos establecido una conexión entre nuestra demostración, más general pues consideramos Ω abierto y conexo, con la demostración hecha en las notas.

Ahora daremos una generalización de la fórmula de Cauchy. Recordemos que la fórmula de Cauchy la hicimos para curvas simples. Para caminos no simples podemos demostrar la siguiente

Teorema. Sea Ω un abierto convexo. Sea γ un camino cerrado de Ω (no necesariamente simple) y $f \in H(\Omega)$. Si $z \in \Omega - \{\gamma[a, b]\}$ entonces

$$\mathrm{Ind}_{\gamma}(z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Demostración: Para $z \in \Omega - \{\gamma([a, b])\}$ definamos la función

$$g(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} & \zeta \neq z \\ f'(z) & \zeta = z \end{cases}$$

La función g es continua en Ω y pertenece a $H(\Omega - \{z\})$. Al ser Ω convexo se puede definir la primitiva de g y entonces $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = 0$. Entonces

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(\zeta)d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta - z}d\zeta,$$

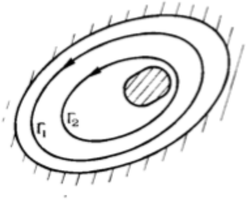
despejando y usando la fórmula del índice se concluye.

El resultado anterior es una generalización a curvas no simples, sin embargo para su demostración debemos suponer que el camino cerrado, no necesariamente simple, se encuentra contenido en un conjunto convexo. Existen varias generalizaciones de este resultado. Nosotros enunciaremos una.

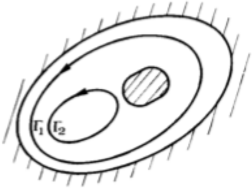
Pero previamente debemos introducir el concepto de homotopía.

Definición 1. Sean γ_0 y γ_1 dos caminos cerrados.y definidos en Ω. Los dos caminos se dicen homotópicos en Ω si existe una función continua $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ tal que

- $H(0,s) = \gamma_0(s)$ y $H(1,s) = \gamma_1(s)$.
- $H(0,t) = H(1,t), \forall t \in [0,1]$.



Curvas homotópicas



Curvas no homotópicas

Definición 2. Un dominio Ω es simplemente conexo si es conexo y cada curva cerrada en Ω es homotópica a una curva constante.

Teorema. (Cauchy para dominios simplemente conexos) Sea $f \in H(\Omega)$ y Ω simplemente conexo. Entonces para toda curva cerrada γ contenida en Ω se tiene

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demostración: Como toda curva cerrada en un dominio simplemente conexo es homotópica a una contante. El teorema se deduce de dos hechos $\int_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = 0$ si $\tilde{\gamma}(t) = \alpha$, $\forall t \in [0,1]$.

Y por otra parte si dos curvas γ_1 y γ_2 son homotópicas entonces

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz.$$

Este hecho amerita demostración. Recordemos la existencia de una función $H : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ que nos permite evolucionar continuamente de γ_1 a γ_2. Al ser H continua la imagen $H([0,1] \times [0,1]) \subset \Omega$ es compacto. Así que está separado de la frontera de Ω una distancia δ. Esto es

$$\min_{(s,u)} d(H(s,u), \partial\Omega) > \delta$$

Y por continuidad uniforme existe $\varepsilon > 0$ tal que $|H(s_1, u_1) - H(s_2, u_2)| < \delta$ siempre que $|s_1 - s_2| < \varepsilon$ y $|u_1 - u_2| < \varepsilon$. Sea $n > \frac{1}{\varepsilon}$.
Definamos las siguientes curvas cerradas $\tilde{\gamma}_{kj}$:

$$\tilde{\gamma}_{kj} = \theta_{kj} + \Lambda_{k,j} - \theta_{k,j+1} - \Lambda_{k,j}$$

donde

$$\theta_{kj}(s) = H(s, \frac{j}{n}), \quad \frac{k}{n} \leq s \leq \frac{k+1}{n}$$
$$\Lambda_{kj}(u) = H(\frac{k}{n}, u), \quad \frac{j}{n} \leq u \leq \frac{j+1}{n}.$$

La curva $\tilde{\gamma}_{kj}$ es diferenciable a trozos y por la definición de ε está contenida en el disco centrado en $H(\frac{k}{n}, \frac{j}{n})$ y de radio δ. Por nuestro Teorema de Cauchy previo tenemos

$$\int_{\tilde{\gamma}_{k,j}} f(z)dz) = 0,$$

ahora tomamos la siguiente suma

$$\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\tilde{\gamma}_{k,j}} f(z)dz = 0.$$

Pero es una suma telescópica, los términos intermedios se cancelan quedándonos

$$(\int_{\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{k0}} + \int_{\sum_{j=0}^{n-1}\Lambda_{nj}} - \int_{\sum_{k=0}^{n-1}\theta_{kn}} - \int_{\sum_{j=0}^{n-1}\Lambda_{0j}})f(z)dz = 0,$$

pero $\gamma_1 = \sum_{k=0}^{n-1}\theta_{k0}$ y $\gamma_2 = \sum_{k=0}^{n-1}\theta_{kn}$ y por la propiedad de homotopía se tiene que $\Lambda_{0,j} = \Lambda_{n,j}$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Obteniendo así el resultado.

Queremos terminar enunciando un resultado general similar al que demostramos para regiones convexas.
Teorema. Sea Ω una región simplemente conexa y sea γ una curva cerrada en Ω. Se tiene la siguiente fórmula de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Observación: En las notas estos resultados se demuestran para regiones más generales y para cadenas que se definen como "suma" de caminos. En este curso no consideraremos tal generalidad.