Clase No. 9 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Continuación de las propiedades globales de las funciones holomorfas

La primera consecuencia del teorema de Liouville resulta ser el Teorema Fundamental del Algebra.

Teorema: Sea P un polinomio de grado $m > 1$ entonces P posee m raíces, contando sus multiplicidades.

Demostración: Supongamos que P no se anula en $\mathbb{C}$ entonces la función $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ es holomorfa para todo $z \in \mathbb{C}$, luego es entera. Además sabemos que

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = 0.$$

Por consiguiente la función es acotada y por tanto constante. Así que P debe anularse. Sea $m > 1$ y z_0 un punto donde se anula P entonces podemos escribir $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ con Q un polinomio de grado $m - 1$ entonces el mismo argumento se puede hacer para Q.

Definición: Sea $f \in H(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Decimos que $|f|$ tiene un máximo local estricto en a si existe un $D(a, r) \subset \Omega$ tal que $|f(a)| > |f(z)|$, para todo $z \in D'(a, r)$.

Teorema: (Del módulo máximo). Sea $f \in H(\Omega)$. Entonces $|f|$ no tiene puntos que sean máximos locales estrictos en Ω.

Demostración: Supongamos que existe un tal a y un disco $D(a, r)$ tal que $|f(a)| > |f(z)|$ para $z \in D'(a, r)$. Si $\rho < r$ tenemos que $|f(a)| > |f(a + \rho e^{it}|$. La fórmula integral de Cauchy nos dice que

$$|f(a)| = \frac{1}{2\pi}|\int_0^{2\pi} \frac{f(a + \rho e^{it})}{(a + \rho e^{it}) - a}\rho i e^{it} dt| < |f(a)|,$$

lo cual es una contradicción.

Teorema de la función inversa. Y la propiedad de ser una aplicación abierta.

En primer lugar recordemos el enunciado del Teorema de la función inversa para funciones a valores reales.

Teorema: Sean $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de clase C^k, z_0 en el interior de Ω y la matriz Jacobiana en z_0 $(J_f(z_0))$ invertible. Entonces existe un entorno $V \subset \Omega$ de z_0 y un entorno W de $f(z_0)$, tal que $f : V \to W$ es biyectiva y su inversa es de clase C^k.

Teorema: Sea $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$ y $f'(z_0) \neq 0$. Entonces existe un entorno $V \subset \Omega$ de z_0 y W un entorno de $f(z_0)$ tal que

1. $f : V \to W$ es biyectiva.
2. si $\psi : W \to V$ es la inversa de f entonces $\psi \in H(W)$.

Demostración: Recordemos que si $z = x + iy$ tenemos que existen funciones u y v definidas en $\mathbb{R}^2$ y a valores en $\mathbb{R}$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Por definición

$$J_f(x, y) = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}.$$

Por tanto $\det(J_f(x, y)) = u_x v_y - v_x u_y = u_x^2 + v_x^2$ la última ecuación se desprende de las condiciones de C-R.

Como por hipótesis se tiene que $f'(z_0) \neq 0$ entonces $\det(J_f(x_0, y_0)) \neq 0$. Luego al aplicar el Teorema de la función inversa se obtiene el punto (1).
Para demostrar (2) debemos calcular la derivada de ψ por definición. Sean $w, w_1 \in W = f(V)$ entonces si $f(z) = w$ y $f(z_1) = w_1$

$$\frac{\psi(w) - \psi(w_1)}{w - w_1} = \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)},$$

pero por continuidad de la inversa si $w \to w_1$ entonces $f(z) \to f(z_1)$.

Así al tomar límite tenemos

$$\psi'(z_1) = \lim \frac{\psi(w) - \psi(w_1)}{w - w_1} = \lim_{z \to z_1} \frac{z - z_1}{f(z) - f(z_1)} = \frac{1}{f'(z_1)},$$

ya que $f'(z) \neq 0$ para $z \in V$.

Definamos por Π_m a la función potencia a la m esto es $\Pi_m(z) = z^m$.

Tenemos el siguiente teorema.
Teorema:(Estructura local) Sea $f \in H(\Omega)$, $z_0 \in \Omega$, $w_0 = f(z_0)$ y f no constante. Entonces

- $f(z) - w_0 = \Pi_m(\varphi(z))$ para una $\varphi \in H(V)$.
- φ es inyectiva en V, $\varphi'(z_0) \neq 0$ $\forall z \in V$ y $\varphi(V) = D(0, r)$.

Demostración. Sea m el orden del cero de $f(z) - w_0$ en z_0. Así podemos escribir $f(z) - w_0 = (z - z_0)^m g(z)$ con $g(z)$ holomorfa y $g(z_0) \neq 0$.

Se tiene que $g \in H(V)$ y por continuidad $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(z_0, r)$. Como g no se anula en ese disco la función $\frac{g'(z)}{g(z)}$ es holomorfa en el disco. Como cualquier disco es convexo se tiene por el Teorema de Cauchy que existe una función holomorfa en el disco tal que $H'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$. Definamos la función holomorfa $e^{-H}g$ al derivarla obtenemos

$$(e^{-H}g)' = -e^{-H}H'g - e^{-H}g' = 0.$$

Esto nos dice que $e^{-H}g = e^{C}$ para una cierta constante C. Esto es $g(z) = e^{H(z)+C}$, si tomamos como H a la función $H + C$ se tiene $g(z) = e^{H(z)}$.

Definamos ahora $\varphi(z) = (z - z_0)e^{\frac{H(z)}{m}}$, entonces $(\varphi(z))^m = (z - z_0)^m e^{H(z)} = (z - z_0)^m g(z) = f(z) - w_0$, hemos demostrado el primer punto. Por otra parte $\varphi(z_0) = 0$ y como φ es holomorfa existe una V entorno de z_0 tal que $\varphi^{-1}(D(0, r)) = V$.

Decimos que una aplicación es abierta si lleva entornos abiertos en abiertos. Tenemos el siguiente

Corolario. Si $f \in H(\Omega)$ entonces f es abierta.

Demostración: Por el teorema anterior existe un entorno $V \subset \Omega$ de z_0 tal que

$$f(V) = w_0 + \Pi_m(\varphi(V)) = w_0 + \Pi_m(D(0,r)).$$

$$= w_0 + D(0, r^m) = D(w_0, r^m).$$

Demostremos dos corolarios.

Corolario. Sea $f \in H(\Omega)$ e inyectiva en Ω. Entonces $f'(z) \neq 0$ y la inversa es holomorfa.

Demostración: Si $f'(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in \Omega$ entonces f tiene un cero de orden $m > 1$ en z_0, por lo que hemos visto no puede ser inyectiva. Así que $f'(z) \neq 0$ y tiene inversa y la inversa es holomorfa.

Corolario. Sea $f \in H(\Omega)$ y $|f(z)|$ es constante en Ω, entonces f es constante en Ω.
Demostración: Si $|f(z)|$ es constante en Ω, entonces $f(\Omega)$ está en el borde de un disco de centro cero y radio $r > 0$. Por tanto $f(\Omega)$ no es un conjunto abierto y por consiguiente f es constante.