Clase No. 8 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Singularidades de nuevo

Propiedades globales.

Singularidades de nuevo.
Definición: Un punto $a \in \Omega$ es una singularidad aislada de f, si $f \in H(\Omega - \{a\})$. La singularidad se dice evitable si f se pude extender a una función pertenciente a $H(\Omega)$.
Definamos ahora el disco sin su centro

$$D'(a, R) = \{z : 0 < |z - a| < R\}.$$

Se tiene el siguiente teorema.

Teorema: Sea $f \in H(\Omega - \{a\})$ entonces se verifica alguna de las tres condiciones y sólo una.

1. f tiene una singularidad evitable en a.
2. Existen números complejos $\{c_i\}_{i=1}^m$ con $c_m \neq 0$ tales que la función
$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k},$$
tiene una singularidad evitable en a
3. Si $D(a, R) \subset \Omega$ entonces $f(D'(a, R))$ es denso en $\mathbb{C}$.

Observación: En el caso (2) se dice que f tiene un polo de orden m en a y además se cumple que $f(z) \to \infty$ cuando $z \to a$. Cuando se verifica (3) se dice que f tiene una singularidad esencial en a. Importante bajo esta condición no existe $\lim_{z\to a} f(z)$ y f no está acotada.

Demostración: Supongamos que (3) no se cumple. Entonces existe un $w \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w| > \delta$, para todo $z \in D'(a, R)$. Definamos la función $g(z) = \frac{1}{f(z)-w}$. Esta función es holomorfa en $D'(a, R)$ y como $|g(z)| < \frac{1}{\delta}$ es acotada.

En particular podemos definir $g(a)$ de tal forma que $g \in H(D(a,R))$. Veamos un primer caso.
Sea $g(a) \neq 0$ en primer lugar despejando obtenemos $f(z) = \frac{1}{g(z)} + w$ y esto implica $\lim_{z\to a} f(z) = \frac{1}{g(a)} + w$.
Deducimos entonces que f es acotada en $D'(a,R)$, luego la singularidad es evitable y se cumple (1).
Demostremos que si $g(a) = 0$ entonces se cumple (2). Como g es analítica en $D(a,R)$ existe un $|c_m| > 0$ tal que

$$g(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k(z-a)^k = (z-a)^m \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k := (z-a)^m g_1(z).$$

La función g_1 es holomorfa y verifica $g_1(a) = c_m \neq 0$. Entonces se puede definir $h(z) = \frac{1}{g_1(z)}$, función holomorfa en el disco $D(a, \rho) \subset D(a, R)$. Dado que $h(a) \neq 0$ entonces se tiene la siguiente expresión $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n$ con $0 \neq h(a) = b_0$. De aquí

$$f(z) = (z-a)^{-m}h(z) + w = (z-a)^{-m}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + w.$$

$$= b_0(z-a)^{-m} + b_1(z-a)^{m-1} \ldots + b_{m-1}(z-a)^{-1} + w + \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k}(z-a)^k.$$

Como consecuencia

$$f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{m-k}}{(z-a)^k} = w + \sum_{k=0}^{\infty} b_{m+k}(z-a)^k.$$

Luego

$$\lim_{z \to a} \left(f(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_{m-k}}{(z-a)^k}\right) = w + b_m.$$

De lo cual se deduce que la función entre paréntesis tiene una singularidad evitable.
Por otra parte si se verifica (3) ninguna de las otras dos condiciones se cumplen.
De este teorema se deduce el siguiente corolario cuya demostración puede verse en las notas.

Corolario. Sea $f \in H(\Omega - \{a\})$ entonces

1. f tiene una singularidad evitable en a si y solo si existe el número complejo $\lim_{z \to a} f(z)$.
2. f tiene un polo de orden m, para algún m, si y solo si $\lim_{z \to a} f(z) = \infty$.
3. f tiene una singularidad esencial en a si y solo si no existe el $\lim_{z \to a} f(z)$.

Podemos dar tres ejemplos

$$a)\, f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2} \quad b)\, g(z) = \frac{1}{z^m}, \quad c)\, h(z) = e^{\frac{1}{z}}.$$

Es inmediato demostrar que la primera función tiene una singularidad evitable en $z = 0$, la segunda un polo en el mismo punto. Para la tercera función tenemos que en $z = 0$ si ponemos $z = x + iy$. Se tiene $e^{\frac{1}{z}} = e^{\frac{x}{x^2+y^2}} e^{-i\frac{y}{x^2+y^2}}$, si $y = 0$ tenemos dos valores del límite de acuerdo si nos acercamos a cero en el eje real positivo o por el eje real negativo, por tanto concluimos que no existe el límite y la singularidad es esencial.

Veamos la siguiente propiedad. Sea f con un polo de orden m en a. Entonces

$$f(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{(z-a)^k} + h(z)$$

y $h(a) = c_m \neq 0$. Así

$$\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) = c_m \neq 0.$$

Y también

$$\lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = 0;\ n > m;\ \lim_{z \to a} (z-a)^n f(z) = \infty;\ n < m$$

Como ejemplo podemos ver que la función $\frac{1}{(\sin z)^3}$ tiene un polo de orden 3 en cero.

Propiedades globales.
Antes de comenzar con las propiedades globales quisiéramos dar un cierto recíproco del Teorema de Cauchy. Se tiene el siguiente teorema
Teorema (Morera). Sea f una función continua en Ω y tal que para todo camino cerrado γ contenido en Ω se cumple $\int_\gamma f(z) = 0$ entonces $f \in H(\Omega)$.
Demostración: Sea α y β dos complejos en Ω. Definamos

$$F(\beta) = \int_\alpha^\beta f(z)dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

si γ es un camino tal que $\gamma(0) = \alpha$ y $\gamma(1) = \beta$.

Ahora si γ_1 es otro camino con esta propiedad entonces el camino concatenado $\gamma\tilde{\gamma}_1$ (con $\tilde{\gamma}_1 = -\gamma_1$) es un camino cerrado contenido en Ω. Esto implica que la función F no depende del camino y se cumple $F'(\beta)) = f(\beta)$ existe lo que implica que F es analítica y por consiguiente lo es también f.
Una función holomorfa en todo el plano $\mathbb{C}$ se denomina función entera (i.e. $f \in H(\mathbb{C})$). Estanos interesados en algunas propiedades de estas funciones.

Teorema. (Estimados de Cauchy.) Sea $f \in H(\Omega)$ y $D(a, R) \subset \Omega$. Si $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in D(a; R)$ entonces para cualquier $\rho < R$ y todo $n \in \mathbb{N}$

$$|f^{(n)}| \leq \frac{Mn!}{\rho^n}.$$

Demostración:

$$|f^{(n)}(z)| = |\frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{\rho^{n+1}} 2\pi\rho = \frac{Mn!}{\rho^n}$$

Teorema.(Liouville) Si f es entera y acotada, entonces es constante.
Demostración: El teorema anterior puede ser aplicado para todo ρ pues la función es holomorfa en todo $z \in \mathbb{C}$. Así que si tomamos $n = 1$ se tiene

$$|f'(z)| \leq \frac{n!M}{\rho} \to 0 \quad \rho \to \infty.$$

Por tanto la derivada es igual a cero en cualquier punto luego la función es constante