Clase No. 6 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Sea $\gamma = S(0,1)$ la circunferencia de radio uno. Calculemos

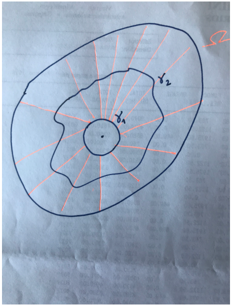
$$\int_\gamma z^n dz = i\int_0^{2\pi} e^{int}e^{it}dt = i\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt = 0, \ \ n \neq -1,$$

y

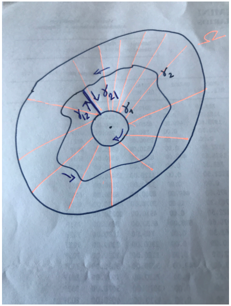
$$\int_\gamma z^{-1}dz = 2\pi i.$$

Igual resultado se obtiene si calculamos la integral con respecto a la circunferencia $S(0,R)$.

Ahora veremos que las integrales tienen el mismo valor cuando se integra sobre cualquier curva simple cerrada alrededor del origen.



En la figura anterior observamos γ_1 la circunferencia unitaria y γ_2 una curva cerrada que contiene en su región acotada interior a esta circunferencia. Podemos construir la concatenación $\gamma_1\gamma_{12}\gamma_{21}\gamma_2$ que se muestra a continuación



Por el Teorema de Cauchy tenemos dado que fuera de $D(0,1)$ la función z^n es analítica entonces

$$\int_{\gamma_1\gamma_{12}\gamma_{21}\gamma_2} z^n dz = [\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_{12}} + \int_{\gamma_{21}} - \int_{\gamma_2}](z^n)dz,$$

pero tenemos

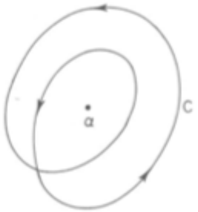
$$\int_{\gamma_{12}} z^n dz = -\int_{\gamma_{21}} z^n dz,$$

obteniendo

$$\int_{\gamma_2} z^n dz = \int_{\gamma_1} z^n dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

Un resultado similar se obtiene si consideramos una curva cerrada simple γ que contiene a z_0 y calculamos $\int_\gamma (z - z_0)^n dz$.

Consideremos ahora el punto $\alpha \in \mathbb{C}$ contenido en la curva C que se muestra en la siguiente figura



Dividiendo la curva C en dos curvas γ_1 y γ_2 que se tocan en el punto multiple tenemos por la propiedad de la concatenación

Tenemos

$$\int_C z^{-1}dz = \int_{\gamma_1} z^{-1}dz + \int_{\gamma_2} z^{-1}dz = 2\pi i + 2\pi i = 4\pi i.$$

Este resultado tiene una generalización en el Teorema del Índice. Previamente definamos el índice de un punto z_0 respecto a un camino

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}, \quad z_0 \in \Omega = \mathbb{C} - \{\gamma[a, b]\}$$

Teorema. (del índice)Sea γ un camino cerrado entonces la función Ind_γ verifica

1. La función Ind_γ sólo toma valores enteros.
2. La función Ind_γ es continua. Por tanto es constante en cada componente conexa de Ω.
3. si Ω_1 es la componente no conexa de Ω entonces $\text{Ind}_\gamma = 0$.

Demostración: Primero demostremos (2) y (3). Para ver esta última propiedad calculemos

$$|\text{Ind}_\gamma(z_0)| \leq \int_\gamma \frac{|dz|}{|z - z_0|} = \frac{1}{|z_0|} \int_\gamma \frac{|dz|}{|1 - \frac{z}{z_0}|}.$$

Pero $|1 - \frac{z}{z_0}| \geq |1 - \frac{|z|}{|z_0|}|$. Entonces como $z \in \gamma([a,b])$ que es compacto $\frac{|z|}{|z_0|} \leq \frac{M}{|z_0|}$, para una constante positiva M. Luego

$$\frac{1}{|1 - \frac{|z|}{|z_0|}|} \leq \frac{1}{1 - \frac{M}{|z_0|}} \to 1.$$

Por tanto $\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) \to 0$ y como toma valores enteros es cero.

Para demostrar (2) basta considerar

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_2)| \leq |z_2 - z_1| \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - z_1||\gamma(t) - z_2|} dt,$$

Si δ es el mínimo entre las distancias de de z_1 y z_2 a $\gamma[a, b]$ entonces $|\gamma(t) - z_1||\gamma(t) - z_2| \geq \delta^2$ y obtenemos

$$|\mathrm{Ind}_\gamma(z_1) - \mathrm{Ind}_\gamma(z_2)| \leq \frac{|z_1 - z_2|}{\delta^2} \text{ Long}\gamma \to 0 \text{ sí } z_1 \to z_2.$$

Por último demostraremos (1).

Un número complejo $\frac{w}{2\pi i}$ es un entero siempre que $e^w = 1$. Queremos entonces demostrar

$$e^{\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0}} = e^{\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt} = 1.$$

Esto quiere decir que debemos probar que si $h(t) = e^{\int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z_0}ds}$ se tiene $h(b) = 1$. Así derivando obtenemos

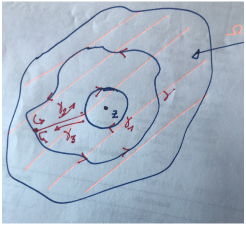
$$\frac{h'(t)}{h(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}.$$

Lo que implica que $(\frac{h(t)}{\gamma(t)-z_0})' = 0$ salvo un número finito de puntos. Así $\frac{h(t)}{\gamma(t)-z_0}$ es constante y como $h(a) = 1$ se tiene que $h(t) = \frac{\gamma(t)-z_0}{\gamma(a)-z_0}$ y por ser γ un camino cerrado $\gamma(b) = \gamma(a)$ se verifica entonces $h(b) = 1$.

Fórmula de Cauchy: Sea $f \in H(\Omega)$ y γ un camino cerrado, simple y dirigido contenido en Ω de tal forma que la región del plano dentro de la curva está contenida toda en Ω. Entonces

$$f(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz.$$

Demostración: La figura muestra la región Ω y la curva γ cuyo recorrido está dentro de Ω



Además alrededor del punto z hemos puesto una circunferencia de radio ε. Podemos aplicar el Teorema de Cauchy pues la curva concatenación $\gamma\gamma_2\gamma\gamma_3$ es cerrada y su región interior esta contenida en $\Omega - \{z\}$ y la función $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ es analítica allí. Entonces

$$0 = \int_{\gamma\gamma_2\gamma\gamma_3} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz - \int_{\gamma_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz.$$

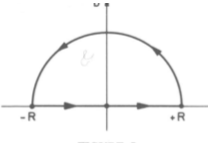
entonces si $\zeta = z + \varepsilon e^{it}$ se tiene

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dz = i \int_0^{2\pi} \frac{f(z + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon e^{it} dt$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{it}) dt \to 2\pi i f(z).$$

Podemos dar una aplicación muy rápida.

Ejemplo. Sea la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ calcular $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$. Sea el siguiente camino



Entonces $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)}$. Si tomamos $f(z) = \frac{1}{z+i}$ e integramos sobre el camino anterior tenemos por la fórmula de Cauchy

$$2\pi i f(i) = \pi = \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2} dx + Ri \int_0^\pi \frac{e^{it}}{1+R^2 e^{i2t}} dt$$

Y la segunda integral

$$|Ri\int_0^{\pi}\frac{e^{it}}{1+R^2e^{i2t}}dt| = R\int_0^{\pi}|\frac{e^{it}(1+R^2e^{-i2t})}{1+2R^2\cos t+R^4}|dt$$

$$\leq R\pi(1+R^2)\frac{1}{(1-R^2)^2}\to 0, \quad R\to\infty.$$

De esta manera

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Teorema. Si $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es analítica en su dominio y el disco abierto $D(z_0, R)$ esta totalmente contenido en Ω entonces f puede expresarse como una serie de potencias en $D(z_0, R)$.
Demostración. Sabemos que la fórmula de Cauchy es válida sea $\gamma = S(0, R)$

$$2\pi i f(z) = \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta.$$

Sabemos que $|\zeta - z_0| < R$ entonces $|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}| < 1$. Por consiguiente

$$\frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{z - z_0}{\zeta - z_0})^n < \infty.$$

Así,

$$
\begin{aligned}
2\pi i f(z) &= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\frac{1}{(\zeta-z_0)}d\zeta \\
&= \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0})^n d\zeta \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta.
\end{aligned}
$$

De ahí se desprende

$$
f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-z_0)^n\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}d\zeta.
$$

El intercambio de serie con la integral es consecuencia de la convergencia uniforme dentro del disco. Luego

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n, \quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

Derivando la serie de potencias se encuentra que $c_n = f^{(n)}(z_0)n!$, obteniendo $f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$.

Daremos un teorema que se emparenta con el Teorema de Cauchy y que esta demostrado en las notas.

Teorema. Si $f \in H(\Omega)$ y existe $F \in H(\Omega)$ tal que $f' = f$ entonces para todo γ camino cerrado con $\gamma[a, b]) \subset \Omega$

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Demostración. Sea γ entonces el camino cerrado se tiene $\gamma(a) = \gamma(b)$

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = F(\gamma(t))|_a^b = F(\gamma(b) - F(\gamma(a)) = 0.$$