Clase No. 4 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ diremos que la derivada de f existe en $z \in \Omega$ si existe el límite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = f'(z).$$

Observación. *El límite anterior existe cuando h se acerca a cero en cualquier dirección esto es $h = |h|e^{i\theta}$ para cualquier $\theta \in [0, 2\pi)$.* En particular dos direcciones nos interesan $h = (h_1, 0)$ y $h = (0, h_2)$.

De esta forma para el primer caso $h = (h_1, 0)$, si denotamos $z = x + iy$ y $f(z) = u(x, y) + i(v(x, y)$ se obtiene

$$\frac{f(z + (h_1, 0)) + f(z)}{h}$$

$$= \frac{u(x + h_1, y) - u(x, y)}{h_1} + i\frac{v(x + h_1, y) - v(x, y)}{h_1},$$

y al tomar límite

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y). (*)$$

Podemos ahora considerar $h = (0, h_2) = ih_2$

$$\frac{f(z + (0, h_2)) + f(z)}{ih_2}$$

$$= \frac{u(x, y + h_2) - u(x, y)}{ih_2} + \frac{v(x, y + h_2) - v(x, y)}{h_1},$$

al tomar límite obtenemos

$$f'(z) = \frac{u_y(x, y)}{i} + v_y(x, y) = -iu_y(x, y) + v_y(x, y). \, (**)$$

E igualando $(*)$ y (**) se cumple

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad v_x(x,y) = -u_y(x,y).$$

Este par de ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de Cauchy-Riemann.
Consideremos el siguiente ejemplo

Ejemplo 1. Sea $f(z) = z^2$. Entonces si $z = x + iy$ se tiene que $f(z) = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$. De aquí se desprende que $u(x,y) = x^2 - y^2$ y $v(x,y) = 2xy$. Así

$$f'(z) = u_x + iv_y = 2x + i2y = 2(x+iy) = 2z$$

$$f'(z) = -iu_y(x,y) + v_y(x,y) = -i(-2y) + 2x = 2(x+iy) = 2z.$$

Ejemplo 2. Sea la función

$$\exp(z) = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y.$$

Entonces $u(x,y) = e^x \cos y$ y $v(x,y) = e^x \sin y$. Tenemos

$$(\exp(z))' = e^x \cos y + ie^x \sin y = \exp(z).$$

En la clase pasada vimos que el recíproco es cierto si $f(z) = u(x, y) + v(x, y)$ y las derivadas parciales de u y de v existen y verifican las condiciones de Cauchy-Riemann entonces la función f tiene derivada y se cumplen tanto $(*)$ como $(**)$.

Ejemplo 3. Definamos la función $\log z = \log|z| + i \arg z$. Luego $u(x, y) = \frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$ y $v(x, y) = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}$ tenemos

$$u_x(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v_x(x, y) = \frac{1}{1 + \frac{y}{x}}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2},$$

luego

$$(\log z)' = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{z}.$$

Vamos a considerar la función $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$. Esta función es la extensión compleja de la función coseno real. De esta manera podemos ver si escribimos $z = x + iy$ se tiene si $y = 0$ la función deviene nuestro coseno conocido $\cos x$.

Pero si $x = 0$ vale $\cos(iy) = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \cosh y$, también al definir $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Es inmediato que $\sin(x + i0) = \sin x$ y $\sin(iy) = i \sinh y$.

Como la fórmula para el coseno de una suma se extiende sin problema al caso complejo podemos entonces escribir

$$\begin{aligned}\cos z = \cos(x+iy) &= \cos x \cos(iy) - \sin x \sin(iy) \\ &= \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = u(x,y) + iv(x,y)\end{aligned}$$

Por tanto

$$(\cos z)' = -\sin x \cosh y - i \cos x \sinh y = -\sin z$$

Sucesiones y series de números complejos.
Ya hemos introducido las nociones de convergencia de sucesiones de números complejos la recordamos. Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos converge a z si para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 tal que si $n > n_0$ entonces $|z_n - z| < \varepsilon$. Si $z_n = a_n + ib_n$ y $z = a + ib$ entonces se tiene $z_n \to z \Leftrightarrow a_n \to a$, $b_n \to b$. Notemos que a_n y b_n son sucesiones de números reales.

De esta forma toda afirmación sobre convergencia de sucesiones de números complejos puede traducirse en la misma afirmación para sus sucesiones coordenadas.
La sucesión de números complejos $s_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ constituye la sucesión de sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ y diremos que la serie converge si la sucesión s_n tiene un límite s y escribiremos $s = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$.
Si ponemos $z_k = u_k + iv_k$, el resultado sobre la convergencia de las coordenadas nos permite afirmar $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge si y solo si $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ series de números reales, son convergentes.

Una noción muy útil para probar la convergencia de una serie es la convergencia absoluta. Una serie de números complejos $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente si la serie de números reales positivos $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ converge. En vista de que $|u_k| \leq |z_k|$ y $|v_k| \leq |z_k|$ se tiene por el criterio de comparación de series que la siguiente cadena de implicaciones si $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ converge absolutamente entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k| < \infty \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < \infty, \sum_{k=1}^{\infty} |v_k| < \infty.$$

De esta manera $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ son convergentes y por consiguiente $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ es convergente.

Series de funciones y series de potencias.
Nuestra preocupación ahora lo serán las series de funciones y el criterio de Weiertrass sobre la convergencia uniforme de series de funciones.

Convergencia puntual.
Sea $f_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones de variable compleja a valores complejos. Diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge puntualmente a $f(z_0)$ en $z_0 \in \Omega$ si para todo ε existe un n_0 que depende de ε y de z_0 tal que para todo $n > n_0(\varepsilon, z_0)$

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Convergencia uniforme.
Sea $f_k : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una sucesión de funciones de variable compleja a valores complejos. Diremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ converge uniformemente a f en una región Ω del plano si para todo ε y todo $z_0 \in \Omega$ existe un n_0 que solo depende de ε tal que si $n > n_0$

$$|\sum_{k=1}^{n} f_k(z_0) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Observación. Notemos que dada la definición tenemos también que para $n > n_0$

$$\sup_{z\in\Omega} |\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)| < \varepsilon.$$

Recordemos el siguiente resultado debido Weiertrass que nos resulta muy útil para demostrar la convergencia uniforme de una serie de funciones.

Lema

Sea una serie de funciones $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$*. Si existe una sucesión de reales positivos* M_k *tal que* $|f_k(z)| \leq M_k$ *y la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *es convergente entonces* $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ *converge uniformemente.*

Ejemplo 4. Una aplicación importante de este resultado es a la función zeta de Riemann con aplicaiones en teoría de números y en la descripción de la distribución de los primos en la recta.
Comencemos con un resultado conocido de CDIV. La serie de números positivos $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$ converge para $\alpha > 1$ y diverge para $\alpha \leq 1$.
Si $s = \alpha + i\beta$ definimos la función zeta de Riemann $\zeta(s)$ por medio de la serie

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Pero

$$\frac{1}{n^s} = \frac{1}{n^\alpha}\frac{1}{n^{i\beta}} = \frac{n^{-i\beta}}{n^\alpha} = \frac{e^{-i\beta \log n}}{n^\alpha}.$$

Así

$$|\frac{1}{n^s}| \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

El lema de Weiertrass nos dice que la serie converge uniformemente en la región $\Omega = \{s : \Re s > 1\}$.

Series de potencias.

Introduzcamos de nuevo una serie de potencias. Sea $\{c_n\}$ una sucesión de números complejos la serie de potencias centrada en z_0 es la serie de término general $c_n(z-z_0)^n$. Esto es la serie $\sum_{k=1}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$. En la primera clase estudiamos las propiedades de convergencia de estas series conviene entonces recordarlas. Definamos el radio de convergencia

$$R = [\limsup_{n\to\infty}(|c_n|)^{\frac{1}{n}}]^{-1} \leq \infty.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ converge de manera geométrica en el interior de la circunferencia $S(z_0, R)$ y diverge afuera de $D[z_0, R]$.

Demostremos la primera afirmación si $|z-z_0|<R$ entonces existe un $k<1$ tal que $\frac{|z-z_0|}{R}<k$. Así para n suficientemente grande se verifica

$$|c_n(z-z_0)^n| \leq |c_n||z-z_0|^n \leq \frac{1}{R^n}|z-z_0|^n < k^n.$$

De esta manera

$$|\sum_{n=p}^{\infty} c_n(z-z_0)^n| \leq \sum_{n=p}^{\infty} |c_n||z-z_0|^n \leq \sum_{n=p}^{\infty} k^n \leq k^p \sum_{n=0}^{\infty} k^n = k^p \frac{1}{1-k}.$$

Tomando límite cuando $p \to \infty$ obtenemos que

$$\lim_{p\to\infty} \left|\sum_{n=p}^{\infty} c_n(z-z_0)^n\right| = 0.$$

La convergencia es uniforme en cada disco cerrado contenido en $D(z_0, R)$.
Si por otra parte $|z - z_0| > R$ entonces afirmamos que para infinitos n se tiene que $|c_n||z - z_0|^n \geq 1$ lo que implica que la serie no puede converger.

Probemos la afirmación. Sabemos, pues existe el límite superior, que hay una subsucesión n_ℓ tal que

$$|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} \to \frac{1}{R}.$$

Entonces

$$|c_{n_\ell}||z - z_0|^{n_\ell} \geq (|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} R)^{n_\ell} = (|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} R)^{n_\ell}.$$

Pero

$$|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} R \to 1.$$

Lo que implica nuestra afirmación.

El radio de convergencia puede ser calculado de dos maneras.

- Si existe $\lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{c_n|}$ entonces R es igual al inverso de este valor
- Si existe $\lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}$ entonces $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} |c_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Ahora queremos definir funciones complejas a través de series de potencias. Así sea la siguiente función.

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Por lo que hemos visto si R es el radio de convergencia de tal serie entonces la serie converge uniformemente en todo disco cerrado $D[z_0, R_1]$ para $R_1 < R$.

Veamos que para todo $z \in D(z_0, R)$ entonces existe la derivada de la función que denotamos f' y se cumple

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) c_{m+1} z^m.$$

Esta es también una serie de potencias con sucesión de coeficientes $d_m = (m+1)c_{m+1}$. Debemos demostrar que

$$\limsup_{m\to\infty} (d_m)^{-\frac{1}{m}} = R.$$

Pero tenemos

1. $(m+1)^{\frac{1}{m}} \to 1$
2. $\frac{m+1}{m} \to 1$
3. $\limsup_{m\to\infty}(c_{m+1})^{-\frac{1}{m}} = \limsup_{m\to\infty}((c_{m+1})^{-\frac{1}{m+1}})^{\frac{m+1}{m}} = R.$

Con esta condiciones tenemos que la serie formada al derivar término a término tiene el mismo radio de convergencia que la original.

Por último basta demostrar que para $z \in D(z, R)$

$$\limsup_{h \to 0} \Big| \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1} \Big| = 0.$$

Y esto se puede consultar en las notas.
El procedimiento que hemos usado para f se puede utilizar, cambiando los coeficientes, para la serie que hemos obtenido para f' y por tanto existe la derivada segunda. Y así sucesivamente. Luego existen todas las derivadas.