Clase No. 3 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

En esta clase desarrollaremos el tema de las transformaciones de Möebius.
Sean a, b, c, d cuatro números complejos tales que $ad - bc \neq 0$.
Se define la transformación de Möebius por la fórmula

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{si } z \in \mathbb{C} - \{-\frac{d}{c}\} \\ \varphi(\infty) &= \frac{a}{c} \\ \varphi(-\frac{d}{c}) &= \infty \end{aligned}$$

Notemos que la función está definida en el plano complejo extendido $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, esto es $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. Denotaremos por

$$\mathcal{M} = \{\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}, \text{ tal que } \varphi \text{ es de Möebius}\}$$

En el conjunto $\mathcal{M}$ podemos definir la operación $\circ$. Si φ y ψ son dos transformaciones de Möebious entonces la operación composición se define $\varphi \circ \psi = \varphi(\psi(z))$. Esta operación $\circ : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ es asociativa, tiene elemento neutro que no es otro que la identidad y además toda transformación posee un elemento inverso. Vamos a demostrar sólo la última afirmación, las otras son inmediatas. Debemos demostrar que dada cualquier transformación de Möebius φ existe la transformación inversa.

Esto es debemos encontrar φ^{-1} tal que $\varphi^{-1} \circ \varphi(z) = \varphi^{-1}(\varphi(z)) = z$. Si $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ pongamos $w = \varphi(z)$ así

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \text{ entonces } cwz + dw = az + b$$

$$\text{y despejando } z = \frac{dw-b}{-wc+a},$$

Que resulta también una transformación de Möebius.

Existen transformaciones de Möebius que son elementales e importantes pues a partir de ellas obtenemos cualquier otra por composición.

- **Traslaciones:** $\tau_b : z \to z + b$.
- **Rotaciones:** $\rho_a : z \to az$, $|a| = 1$.
- **Homotecia:** $\varphi_r : z \to rz$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.
- **Inversión:** $I : z \to \frac{1}{z}$.

Toda transformación de Möebius se construye a través de la composición de algunas de las transformaciones elementales anteriores.

En efecto escribamos una transformación genérica de la manera siguiente

$$\frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{1}{c}(\frac{(cz + b)a + cb - ad}{cz + d}) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Entonces

$$z \to cz \to cz + d \to \frac{1}{cz + d} \to \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \to \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

La primera función es $cz = |c|e^{i \arg c}z$ composición de una rotación y una homotecia, la segunda es una traslación. La tercera es una inversión, la cuarta es $z \to (b - \frac{ad}{c})z$. La última es de nuevo una traslación.

Un resultado inmediato es el que toda transformación de Möebius tiene a lo sumo dos puntos fijos. En efecto la ecuación

$$\frac{az+b}{cz+d}, = z,\ cz^2 + (d-a)z - b = 0,$$

tiene a lo sumo dos soluciones complejas. De este resultado es inmediato que si una transformación de Möebius tiene tres puntos fijos es constante. A cada transformación $\frac{az+b}{cz+d}$ se le asocia la matriz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Si $t \in \mathbb{C}$ entonces tA se le asocia la misma transformación que A, si se supone que $ad - bc = 1$ entonces tenemos que A y $-A$ se le asocian a la misma transformación.

Dada la ecuación de segundo grado en dos variables

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0,$$

puede escribirse

$$(x + \frac{\alpha}{2})^2 + (y + \frac{\beta}{2})^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{4} - \gamma.$$

Si se verifica que $\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} > \gamma$ entonces esa ecuación corresponde a una circunferencia con centro en $(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2})$ y de radio $R = \sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2}{4} - \gamma}$. Si en lugar de la desigualdad anterior tenemos la igualdad entonces la circunferencia se torna en un punto.

A partir de este resultado podemos encontrar una nueva forma de escribir una circunferencia. Así para $A \in \mathbb{C}$ con $\Re A \neq 0$ consideremos la ecuación

$$(A + \overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0.$$

Si ponemos $z = x + iy$ y $B = B_1 + iB_2$ tenemos que la expresión anterior es igual a

$$x^2 + y^2 + B_1x + B_2y + \frac{\Re C}{\Re A} = 0,$$

que será una circunferencia siempre que $\frac{1}{4}(B_1^2 + B_2^2) > \frac{\Re C}{\Re A}$.

Al igual que antes podemos demostrar que la ecuación compleja de una recta es

$$\overline{B}z + B\overline{z} + \overline{C} + C = 0,$$

en efecto si suponemos z y B como antes se obtiene la siguiente ecuación

$$B_1x + B_2y = \Re C.$$

De esta forma la ecuación

$$(A + \overline{A})z\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C + \overline{C} = 0,$$

representa a una circunferencia si $\Re A \neq 0$ y a una recta si ocurre lo contrario.

Habiendo introducido esta notaciones estamos en condiciones de demostrar la proposición siguiente, pero antes definamos $\mathcal{F}$ como la familia de rectas y circunferencias del plano.

Proposición. La imagen de un elemento de $\mathcal{F}$ por un elemento de $\mathcal{F}$ es un elemento de $\mathcal{F}$.
Demostración. Basta demostrar la proposición para transformaciones elementales. Y la demostraciones salvo para la inversión son inmediatas. Vamos hacerla para esta última. La ecuación general es

$$(A+\overline{A})z\overline{z}+\overline{B}z+B\overline{z}+C+\overline{C}=0.$$

Y aplicando la inversión $z=\frac{1}{w}$ obtenemos

$$(A+\overline{A})\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}}+\overline{B}\frac{1}{w}+B\frac{1}{\overline{w}}+C+\overline{C}=0.$$

Multiplicando por $w\overline{w}$ se obtiene

$$(A+\overline{A})+\overline{B}\overline{w}+Bw+(C+\overline{C})w\overline{w}=0.$$

Esta ecuación es del mismo tipo de la original. Notemos que si $\Re C=0$ y $\Re A\neq 0$ la circunferencia se transforma en una recta.

Proposición. Dadas dos ternas de complejos $\{a,b,c\}$ y $\{a',b',c'\}$ encontrar una transformación de Möebius que lleva una en la otra.
Demostración: Basta con encontrar un transformación que lleva $\{a,b,c\}$ en $\{0,1,\infty\}$, pues luego hay que componer con la inversa de la que lleva $\{a',b',c'\}$ en $\{0,1,\infty\}$. Para construir la primera de las transformaciones escribamos

$$\varphi(z)=\frac{(b-c)(z-a)}{(b-a)(z-c)}.$$

Tal transformación es única.

Una transformación de Möebius muy importante resulta ser aquella que lleva la recta real en la circunferencia unidad. Basta construir una transformación que lleva tres puntos sobre la recta a tres puntos en la circunferencia. Tomemos entonces los siguientes puntos sobre la recta $\{0, 1, \infty\}$ y enviémoslos a $\{1, i, -1\}$. Entonces si

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Pedimos

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 1 \\ \varphi(1) &= i \\ \varphi(\infty) &= -1. \end{aligned}$$

Como $\varphi(\infty) = \frac{a}{c} = -1$, $a \neq 0$ lo podemos tomar igual a 1, luego $c = -1$. Además $\varphi(0) = \frac{b}{d} = 1$, lo que implica $b = d$. Finalmente $\varphi(1) = i$ así $i = \frac{1+b}{-1+d}$ y por lo tanto $d = b = -i$. Se obtiene entonces

$$\varphi(z) = -\frac{z-i}{z+i}.$$

Otra transformación que juega el mismo papel es $\tilde{\varphi}(z) = \frac{z-i}{z+i}$. Notemos que si $z = x + iy$ entonces este complejo está en la recta real siempre que $y = 0$. De esta forma escribiendo la función encontrada en estas coordenadas se verifica

$$\varphi(z) = -\frac{x + i(y-1)}{x + i(y+1)}, \text{ para } y = 0,\ \varphi(x) = -\frac{x-i}{x+i}.$$

De lo que se obtiene $|\varphi(x)| = \frac{x^2+1}{x^2+1} = 1$ como esperábamos.

Una observación importante y que se deduce de la conexidad es que si a través de una transformación de Möebius una circunferencia es llevada en una recta el interior de la circunferencia es llevado a una de las regiones en las que la recta divide al plano e igual pasa con el exterior. La misma propiedad se cumple cuando una circunferencia es transformada en una circunferencia y una recta en una recta.

Definición. Dos puntos son inversos con respecto a un círculo dado si:

- Los puntos están en una misma semirrecta que pasa por el centro de círculo.
- El producto de sus distancias al centro es igual al cuadrado del radio del círculo.

Veamos que si dos puntos z_1 y z_2 son puntos inversos con respecto al círculo $|z - a| = R$ si y solo si,

$$(z_1 - a)(\overline{z_2 - a}) = R^2.$$

En efecto tenemos

$$\begin{aligned} z_1 &= a + \rho_1 e^{i\theta} \\ z_2 &= a + \rho_2 e^{i\theta} \end{aligned}$$

Entonces

$$(z_1 - a)(\overline{z_2 - a}) = \rho_1 \rho_2 = R^2.$$

Se tiene la relación siguiente si z_1 y z_2 son puntos inversos con respecto al círculo cuya circunferencia viene dada por la ecuación

$$(A + \overline{A}) z \overline{z} + \overline{B} z + B \overline{z} + C + \overline{C} = 0$$

y los dos puntos verifican

$$(A + \overline{A}) z_1 \overline{z_2} + \overline{B} z_1 + B \overline{z_2} + C + \overline{C} = 0$$

Si $\Re A \neq 0$ los dos puntos son conjugados.

Tenemos que podemos escribir

$$z_1\overline{z_2} + \frac{\overline{B}}{\Re A}z_1 + \frac{B}{\Re A}\overline{z_2} + \frac{\Re C}{\Re A} = 0,$$

factorizando se desprende

$$(z_1 + \frac{B}{\Re A})(\overline{z_2} + \frac{\overline{B}}{\Re A}) = \frac{|B|^2}{(\Re A)^2} - \frac{\Re C}{\Re A}.$$

Por lo tanto los puntos son conjugados con respecto al círculo

$$|z + \frac{B}{\Re A}| \leq \sqrt{\frac{|B|^2}{(\Re A)^2} - \frac{\Re C}{\Re A}}.$$

Si un círculo es transformado por una transformación de Möebius φ en otro círculo y z_1 y z_2 son inversos respecto al primer círculo entonces sus transformados serán inversos para el círculo imagen. Como la demostración en el caso de traslación, rotación, homotecia son inmediatas solo lo demostraremos para el caso de la inversión. Entones si consideramos $w_1 = \varphi(z_1)$ y $w_2 = \varphi(z_2)$ tenemos que

$$(A + \overline{A})z_1\overline{z}_2 + \overline{B_1}z_1 + B_1\overline{z_2} + C + \overline{C} = 0$$

Substituyendo

$$(A + \overline{A})\frac{1}{w_1}\frac{1}{\overline{w_2}} + \overline{B_1}\frac{1}{w_1} + B_1\frac{1}{\overline{w_2}} + C + \overline{C} = 0$$

Multiplicando por $w_1\overline{w_2}$ se obtiene

$$(A+\overline{A})+\overline{B_1}\overline{w_2}+B_1w_1+(C+\overline{C})w_1\overline{w_2}=0.$$

Esto implica que w_1 y w_2 son simétricos con respecto al círculo cuya circunferencia es

$$(A+\overline{A})+\overline{B}\overline{w}+Bw+(C+\overline{C})w\overline{w}=0.$$

Terminaremos con una aplicación de este resultado. Queremos conseguir la forma de las transformaciones de Möebius que lleva el círculo unidad en el círculo unidad.

Sea entonces la transformación

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Entonces existe un α con módulo menor que uno tal que $\varphi(\alpha) = 0$. Sea γ el inverso de γ con respecto al círculo de radio uno. Por lo que hemos demostrado se verifica que $\alpha\overline{\gamma} = 1$. Como $\varphi(\alpha) = 0$ y el inverso de cero con respecto al círculo unidad es ∞ entonces por la preservación de los inversos se cumple que $\varphi(\gamma) = \infty$.

Obtenemos $\frac{a\alpha+b}{c\alpha+d}=0$ luego $\alpha=-\frac{b}{a}$ y como $\varphi(\gamma)=\infty$ se tiene $\gamma=-\frac{d}{c}$ lo que implica $\frac{c}{d}=-\overline{\alpha}$

Y de aquí se obtiene

$$\varphi(z)=\frac{a}{c}\left(\frac{z+\frac{b}{a}}{z+\frac{d}{c}}\right)=\frac{a}{c}\overline{\alpha}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}.$$

Pero como para $z=1$ debemos tener

$$1=|\varphi(1)|=|\frac{a}{c}\overline{\alpha}||\frac{1-\alpha}{\overline{\alpha}-1}|=|\frac{a}{c}\overline{\alpha}|.$$

Entonces existe β talque $e^{i\beta}=\frac{a}{c}\overline{\alpha}$. Obteniendo

$$\varphi(z)=e^{i\beta}\frac{z-\alpha}{\overline{\alpha}z-1}, \quad |\alpha|<1.$$