Clase No. 1 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

El plano complejo.
Denotaremos por $\mathbb{C}$ el plano complejo

$$\mathbb{C} = \{z : \ z = (a, b) \, a \, y \, b \in \mathbb{R}\}.$$

Es un conjunto isomorfo con $\mathbb{R}^2$, pero con la peculiaridad de que además de la suma definimos la operación de multiplicación. Entonces definamos las dos operaciones, suma y multiplicación, que convierten a $\mathbb{C}$ en un cuerpo. En efecto sean $z_1 = (a_1, b_1)$ y $z_2 = (a_2, b_2)$ dos elementos de $\mathbb{C}$, definimos

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ z_1 * z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_1 + a_2 b_2) \end{aligned}$$

Sin dificultad se puede demostrar que la suma y la multiplicación son operaciones asociativas y conmutativas. Los elementos de $\mathbb{C}$ son llamados números complejos.

Los números complejos $0 = (0, 0)$ y $1 = (1, 0)$ son respectivamente los elementos neutros de cada una de las operaciones. En efecto es inmediato que $z + 0 = z$ y $z * 1 = z$. Existe un número a resaltar en el cuerpo de los números complejos y es $i = (0, 1)$. La propiedad que lo hace especial es que $i^2 = i * i = (-1, 0) = -1$. Existe cierta ambigüedad en la notación que hemos desarrollado. Trataremos de eliminarla. Si $z = (a, b)$ entonces decimos que $a = \Re z$ la parte real de z y $b = \Im z$ la parte imaginaria. Además podemos escribir

$$z = a(1, 0) + b(0, 1) = \Re z * 1 + \Im z * i := a + ib.$$

El subconjunto de los complejos tales que $b = 0$ lo identificamos con los reales $\mathbb{R}$ y aquellos para los que $a = 0$ les diremos imaginarios, se escriben $z = ib$.

La notación anterior y el hecho demostrado que $i^2 = -1$ nos permite entender sin dificultad la multiplicación. Un hecho importante es que si $w \neq 0$ es un número complejo, podemos definir $\frac{1}{w}$ como aquel número que multiplicado por w da como resultado 1. Así si $w = a + bi$ definamos $\frac{1}{w} = c + di$ entonces

$$w * \frac{1}{w} = ac - bd + (ad + bc)i = 1 + i0,$$

resolviendo obtenemos

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{a^2 + b^2}(a - bi).$$

Una operación muy útil en $\mathbb{C}$ es la conjugación, definimos el conjugado de z como $\overline{z} = a - bi$. De esa manera si calculamos $z * \overline{z} = a^2 + b^2$. De ahora en adelante eliminaremos el signo $*$ para denotar la multiplicación así escribiremos $z\overline{z} = a^2 + b^2$. Esta operación nos permite definir el módulo de un complejo z por $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tenemos las siguientes propiedades

$$
\begin{array}{rcl}
|z| \geq 0 & \text{y} & |z| = 0 \Rightarrow z = 0 \\
|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| & \text{y para} & \lambda \in \mathbb{R}\, |\lambda z| = |\lambda||z| \\
|z_1 z_2| & = & |z_1||z_2| \\
z\overline{z} & = & |z|^2 \\
|z| & = & |\overline{z}|
\end{array}
$$

Ilustraremos con la demostración de la segunda propiedad. Tenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\Re z &= \frac{z+\overline{z}}{2}\\ \Im z &= \frac{z-\overline{z}}{2i}\end{aligned}$$

Entonces para demostrar la propiedad escribimos

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2) &= |z_1|^2 + z_1\overline{z}_2 + z_2\overline{z}_1 + |z_2|^2\\ \leq |z_1|^2 + 2\Re z_1 z_2 + |z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1 z_2| + |z_2|^2\\ &= (|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}$$

Como aplicación obtenemos que si $z = a + bi$ entonces $|z| \leq |a| + |b|$ y además siempre se tiene trivialmente $|a| \leq |z|$, $|b| \leq |z|$.

El módulo de un número complejo nos permite introducir una distancia d entre cualesquiera dos complejos z_1 y z_2 de la manera siguiente

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|.$$

Resulta que esta distancia es la misma que la distancia euclidiana para vectores de $\mathbb{R}^2$. Se tiene si $z_j = a_j + b_j$, $j = 1, 2$

$$d(z_1, z_2) = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Con esta distancia el plano complejo $\mathbb{C}$ se convierte en un espacio métrico completo. Ahora debemos introducir la convergencia de sucesiones de números complejos.

Las nociones de disco abierto $D(a, r)$, disco cerrado $D[a, b]$ y circunferencia $S(a, r)$ todos con centro a y radio r se definen por

$$D(a, r) = \{z : \ d(z, a) < r\}$$

$$D[a, r] = \{z : \ d(z, a) \leq r\}$$

$$S(a, r) = \{z : \ d(z, a) = r\}$$

Decimos que una. sucesión de números complejos $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente a un número complejo z, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ se tiene que

$$d(z_n, z) = |z_n - z| < \varepsilon.$$

En vista de las desigualdades entre el módulo de z y de los valores absolutos de sus partes reales e imaginarias a y b se tiene que $z_n \to z = a + bi$ si y solo si $a_n \to a$ y $b_n \to b$.
La noción de convergencia de una serie se extiende sin dificultad a series de números complejos.

Diremos que una serie de números complejos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge siempre que la sucesión de sumas parciales $S_k = \sum_{n=1}^{k} z_n$ sea convergente esto es para todo epsilon $\varepsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k > n_0$ entonces $|S_k - S| < \varepsilon$. Diremos entonces que la suma de la serie es S y escribiremos $\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$.
Una noción importante para nuestro curso es el de la convergencia absoluta de series de números complejos. Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente si la serie de números reales positivos $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

Por las desigualdades antes citadas, si esta última serie es convergente también los son las series de los valores absolutos de las partes reales e imaginarias es decir si $z_n = a_n + b_n i$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ son convergentes. Las series de términos reales $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son absolutamente convergentes lo que implica que cada una de ella es convergente. Por consecuencia se tiene que la serie original de términos complejos z_n es convergente. Hemos demostrado la siguiente proposición:

Una serie de números complejos absolutamente convergente converge.

Un concepto importante para la teoría de las funciones de variable compleja es la de serie de potencias. Una serie de potencias es una serie de números complejos cuyo término general es de la forma $z_n = c_n(z-a)^n$, donde entendemos $z^n = z * z * \dots z$ producto de z consigo mismo n veces.
Definamos el radio de convergencia

$$R = [\lim\sup_{n\to\infty}(|c_n|)^{\frac{1}{n}}]^{-1} \leq \infty.$$

Entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(z-a)^n$ converge de manera geométrica en el interior de la circunferencia $S(a,R)$ y diverge afuera de $D[a,R]$.

Demostremos la primera afirmación si $|z-a|<R$ entonces existe un $k<1$ tal que $\frac{|z-a|}{R}<k$. Así para n suficientemente grande se verifica

$$|c_n(z-a)^n| \leq |c_n||z-a|^n \leq \frac{1}{R^n}|z-a|^n < k^n.$$

De esta manera

$$|\sum_{n=p}^{\infty} c_n(z-a)^n| \leq \sum_{n=p}^{\infty} |c_n||z-a|^n \leq \sum_{n=p}^{\infty} k^n \leq k^p \sum_{n=0}^{\infty} k^n = k^p \frac{1}{1-k}.$$

Tomando límite cuando $p \to \infty$ obtenemos que

$$\lim_{p\to\infty} |\sum_{n=p}^{\infty} c_n(z-a)^n| = 0.$$

La convergencia es uniforme en cada disco cerrado contenido en $D(a,R)$.

Si por otra parte $|z-a|>R$ entonces afirmamos que para infinitos n se tiene que $|c_n||z-a|^n \geq 1$ lo que implica que la serie no puede converger. Probemos la afirmación, sabemos que existe una subsucesión n_ℓ tal que

$$|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} \to \frac{1}{R}.$$

Entonces

$$|c_{n_\ell}||z-a|^{n_\ell} \geq (|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} R)^{n_\ell} = (|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} R)^{n_\ell}.$$

Pero

$$|c_{n_\ell}|^{\frac{1}{n_\ell}} R \to 1.$$

Lo que implica nuestra afirmación.

Nos detendremos en un ejemplo: la función exponencial. Es una función a variable compleja a valores complejos $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. La definimos por medio de la serie de potencias

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Calculemos el radio de convergencia para lo cual debemos usar la aproximación del factorial por la formula de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$. Entonces

$$|c_n|^{\frac{1}{n}} = (\frac{1}{n!})^{\frac{1}{n}} \sim \frac{e}{(2\pi n)^{\frac{1}{2n}} n} \to 0.$$

De aquí se desprende que $\frac{1}{R} = 0$ luego el radio de convergencia es infinito. Más aún la convergencia es uniforme dentro de cualquier disco $D[0, R_1]$.

La representación por medio de serie nos permite encontrar algunas de las propiedades de la función. Sean z_1 y z_2 dos números complejos. Definamos entonces

$$\exp(z_1+z_2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}z_1^k z_2^{n-k}.$$

Haciendo el cambio de variable $n=m+k$ obtenemos

$$\exp(z_1+z_2)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z_1^k\frac{1}{m!}z_2^m=(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z_1^k)(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}z_1^m),$$

esta última igualdad es producto de la convergencia uniforme. Obtenemos finalmente

$$\exp(z_1+z_2)=\exp(z_1)\exp(z_2).$$

Como $\exp(0) = 1$ tenemos que $\exp(z)\exp(-z) = 1$ entonces deducimos que $\exp(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Adelantándonos a la próxima clase podemos definir la derivada de la exponencial de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
(\exp(z))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} \\
&= \exp(z) \lim_{h\to 0} \frac{\exp(h) - 1}{h} = \exp(z).
\end{aligned}
$$

Esto demuestra que la derivada de la función exponencial es ella misma. Hemos denotado la función exponencial por $\exp(z)$, sin embargo también es usual y a veces más cómodo denotarla por e^z.

Nos detendremos en algunas propiedades que hacen muy interesante a esta función. Consideremos

$$\overline{\exp(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = \exp(\overline{z}).$$

Con la otra notación escribimos $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$. Podemos ahora introducir la fórmula de Euler. En efecto sea $z = i\theta$ entonces $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, luego se tiene

$$|e^{i\theta}|^2 = e^{i\theta}\overline{e^{i\theta}} = e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^0 = 1.$$

Esta igualdad implica que el número complejo $e^{i\theta}$ se encuentra en la circunferencia unitaria lo cual permite definir a su parte real y su parte imaginaria $\Re e^{i\theta} = \cos\theta$ e $\Im e^{i\theta} = \sin\theta$. Obteniendo la remarcable identidad debida a Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Notemos que no tenemos porqué conocer previamente las nociones del seno y del coseno. Podemos tomar la identidad anterior como la base de su definición. También tenemos que $e^{i2k\pi} = 1,\ k \in \mathbb{Z}$. Esto nos conduce a la periodicidad siguiente $e^{z+i2k\pi} = e^z$, también $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

Escribiendo el desarrollo en serie de potencias para $e^{i\theta}$ obtenemos

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j+1}}{(2j+1)!},$$

de lo cual se desprende

$$\cos\theta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} \qquad \sin\theta = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j+1}}{(2j+1)!}.$$

Una de las consecuencias de los elementos que acabamos de exponer es la descomposición polar de un número complejo. Si $z \neq 0$ podemos definir el número complejo $\tilde{z} = \frac{z}{|z|}$, por definición se tiene que $|\tilde{z}| = 1$ y por consiguiente existe un único número real θ perteneciente a $[0, 2\pi)$ tal que $\tilde{z} = e^{i\theta}$ y entonces tenemos que $z = |z|e^{i\theta}$ (la descomposición polar), el número θ recibe el nombre de argumento principal de z. Observemos que θ no es único cualquier $\theta_k = \theta + 2k\pi$ puede cumplir el mismo rol.

Finalizamos con una aplicación. Deseamos calcular la siguiente integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$. Para esto definamos la función $\varphi(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$ para $t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ es inmediato verificar que φ es estrictamente creciente en su dominio de definición pues $\varphi'(t) = 1 + \varphi^2(t) > 0$. Si hacemos en la integral el cambio $x = \varphi(t)$ se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varphi'(t)}{1+\varphi^2(t)} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi.$$