Clase No. 7 de FVC 2022

José Rafael León Ramos
IMERL, UDELAR

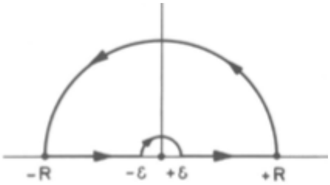
En primer lugar vamos a calcular una integral usando las fórmulas demostradas recientemente.

1.- Ejemplo. Calculemos la siguiente integral impropia

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Sabemos que la integral no converge si tomamos el valor absoluto de la función a integrar.

Consideremos el camino γ que se muestra en la figura y la función $\frac{e^{iz}}{z}$ que es holomorfa en la región interior al camino



Entonces

$$0 = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it} dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}} i\varepsilon e^{it} dt + \int_\varepsilon^R \frac{e^{ix}}{x} dx$$

El primer término podemos acotarlo

$$|\int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}} iRe^{it}dt| = |\int_0^\pi e^{iRe^{it}}dt| = |\int_0^\pi e^{iR\cos t}e^{-R\sin t}dt|$$
$$\leq \int_0^\pi e^{-R\sin t}dt \to 0,\ R\to\infty.$$

Agrupando los términos restantes obtenemos

$$2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin x}{x}dx = i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}}dt + G(R)$$

con $G(R)\to 0$ cuando $R\to\infty$.

De esta manera tomando límite cuando $\varepsilon \to 0$ y luego cuando $R \to \infty$ se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.- Regla de l'Hospital. Sean $f, g \in H(\Omega)$ no nulas y sea el complejo $a \in \Omega$ si se verifica que $\lim_{z\to a} f(z) = \lim_{z\to a} g(z) = 0$. Entonces

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

La demostración de esta proposición se puede leer en las notas.

Ahora daremos otra propiedad que se deduce de la expresión de una función en serie de potencias.

Comportamiento de los ceros de una función holomorfa.

Sea $f \in H(\Omega)$ (recordemos que Ω es un abierto conexo). Si f y todas sus derivadas se anulan en un punto $z_0 \in \Omega$ entonces $f \equiv 0$.

Sea un disco $\gamma = S(z_0, R) \subset \Omega$ entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = 0, \, \forall z \in D(z_0, R).$$

Ahora por ser conexo Ω entonces para si $z_1 \in \Omega$ existe un camino $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ tal que $\gamma(0) = z_0$ y $\gamma(1) = z_1$.

Definamos $\tilde{t} = \sup\{t \in [0,1] : f(\gamma(t)) = 0\}$ este conjunto es no vacío pues 0 pertenece al conjunto. Si $\tilde{t} = 1$ entonces no hay nada que demostrar. Supongamos que $\tilde{t} \neq 1$. Entonces existe una sucesión para $\{t_n\}$ tal que $t_n \to \tilde{t}$ y $f(\gamma(t_n)) = 0$, pero por la continuidad de f y de γ se tiene que $f(\gamma(\tilde{t})) = 0$. Entonces hay un entorno de $\gamma(\tilde{t})$ en el que se anula f y esto contradice el que $\tilde{t}$ sea el supremo.

Un hecho importante es el siguiente: sea

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

el conjunto de ceros de $f \in H(\Omega)$. Si $Z(f)$ tiene un punto de acumulación entonces $f(z) = 0$ para to $z \in \Omega$. Para demostrarlo sea α un punto de acumulación de $Z(f)$. Y consideremos $D(\alpha, r)$ un disco contenido en Ω para $z \in D(\alpha, r)$ tenemos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - \alpha),$$

demostraremos que $c_n = 0$ para todo n.

Supongamos que este no es el caso. Debe entonces existir un m mínimo tal que $c_m > 0$. Podemos escribir

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-\alpha)^n = (z-\alpha)^m \sum_{n=m}^{\infty} c_n(z-\alpha)^{n-m}$$

$$= (z-\alpha)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+m}(z-\alpha)^n = (z-\alpha)^m g(z).$$

Se tiene que $g(\alpha) = c_m \neq 0$ y por continuidad existe un entorno de α tal que g no se anula.

Como $(z-\alpha)^m$ se anula sólo en α entonces $f(z) \neq 0$ para todo z en un entorno de α lo que contradice que α sea un punto de acumulación. Así todas las derivadas de f se anulan en α y por tanto $f \equiv 0$ en Ω.

Corolario. Sean $f, g \in H(\Omega)$, se cumple

1. Si $f(z) = g(z)$ en un conjunto de puntos que posee un punto de acumulación en Ω, entonces $f(z) = g(z)$ para todo punto de Ω.
2. Si $f(z)g(z) = 0$ para todo z entonces $f = 0$ o $g = 0$.

Singularidades.
Empecemos con una observación, la función $|x|$ definida de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada en todo punto salvo en $x = 0$. Este hecho no puede pasar en $\mathbb{C}$.
Proposición: Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua en Ω y $f \in H(\Omega - \{a\})$con $a \in \Omega$. Entonces $f \in H(\Omega)$.
Demostración. Consideremos la función g definida como $g(z) = (z - a)f(z)$ si $z \neq a$ y $g(a) = 0$. La función g pertenece a $H(\Omega - \{a\})$ por ser le producto de dos funciones holomorfas. Veamos que $g \in H(\Omega)$.

$$g'(a) = \lim_{z \to a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z \to a} f(z) = f(a).$$

Al ser holomorfa entonces $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, pero $a_0 = g(a) = 0$. Luego

$$g(z) = (z-a) \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z-a)^{n-1} := (z-a)h(z),$$

donde $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+1}(z-a)^n$. Esta función al ser representada en series de potencias es holomorfa en un disco $D(a,r)$ para algún $r > 0$. Para $z = a$ se tiene $h(a) = g'(a) = f(a)$. Si $z \neq a$ y como $(z-a)h(z) = g(z) = (z-a)f(z)$, simplificando se obtiene $f(z) = h(z)$.

Dados dos conjuntos Ω_1 y Ω_2 tales que $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ y $f \in H(\Omega_1)$. Decimos que $F : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ es una extensión holomorfa de f, si $F \in H(\Omega_2)$ y $F|_{\Omega_1} = f$.

Proposición. Sea $R > 0$, $f : D(a, R) \to \mathbb{C}$ una función acotada en $D(a, R) - \{a\}$ y holomorfa en ese conjunto. Entonces existe $F \in H(D(a, R))$ tal que $f(z) = f(z)$ para todo $z \in D(a, R) - \{a\}$. Esto es F es una extensión de f.
Demostración: No sabemos si existe el $\lim_{z\to a} f(z)$, luego no podemos aplicar el resultado anterior. Pero podemos definir $g(z) = (z - a)^2 f(z)$ para $z \neq a$ y $g(a) = 0$. Como f es acotada entonces g es continua. Veamos que g es holomorfa en a

$$g'(a) = \lim_{z\to a} \frac{g(z) - g(a)}{z - a} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0, \text{ dado que } f \text{ es acotada.}$$

Entonces tenemos $g(a) = g'(a) = 0$ lo que implica $g(z) = (z - a)^2 F(z)$ con F holomorfa en el disco. Así que $(z - a)^2 f(z) = g(z) = (z - a)^2 F(z)$, y simplificando $f = F$.