Def: Una función f se dice meromorfa en Ω abierto y conexo si $\exists A \subset \Omega$ tal que

1. $f \in H(\Omega \setminus A)$
2. Los elementos de A son polos
3. A no acumula en Ω.

Teorema de los residuos: Sea f meromorfa en Ω, $f \in H(\Omega - A)$. Si Γ es un ciclo en $\Omega - A$ y tal que $\mathrm{ind}_a(\Gamma) = 0 \ \forall a \notin \Omega$, entonces

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{a \in A} C_1(a)\cdot \mathrm{ind}_\Gamma(a)$$

, donde $C_1(a)$ es lo que se llama el residuo de a.

* Recordar que $\underset{\text{Polo de orden } m}{C_1(a)} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!}\left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}$

1) Sea $f(z) = \dfrac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}$, meromorfa en $\mathbb{C}$, $A = \underbrace{\{\underset{z_0}{3i}, \underset{z_1}{-3i}, \underset{z_2}{2i}, \underset{z_3}{-2i}\}}$

Son polos!

a) Encontrar los residuos de a.

$$f(z) = \frac{z^2+2}{(z-3i)(z+3i)(z-2i)(z+2i)}$$

$\rightsquigarrow$ Son todos polos de orden 1, ya que $\lim_{z\to z_i} (z-z_i)^1 f(z) \neq 0$.

$\to z_i^2+2 \neq 0$.

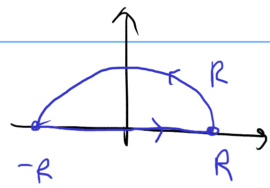
$$C_1(z_i) = \mathrm{Res}(f, z_i) = \lim_{z\to z_i}(z-z_i)f(z) = \lim_{z\to z_i}\frac{(z-z_i)}{(z^2+9)(z^2+4)}\cdot(z^2+2) = \lim_{z\to z_i}\frac{(z-z_i)\cdot\overbrace{(z^2+2)}}{z^4+13z^2+36}$$

$$= (z_i^2+2)\cdot\lim_{z\to z_i}\frac{z-z_i}{z^4+13z^2+36} = (z_i^2+2)\cdot\frac{1}{4z_i^3+26z_i}$$

Lopital.

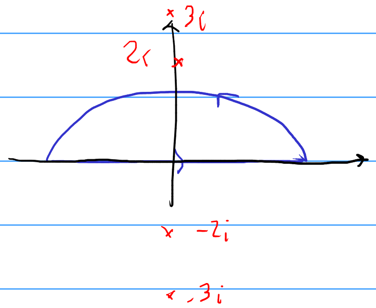
$\underbrace{\{\underset{z_0}{3i}, \underset{z_1}{-3i}, \underset{z_2}{2i}, \underset{z_3}{-2i}\}}$

b) $\int_\gamma f(z)\,dz$, donde γ es



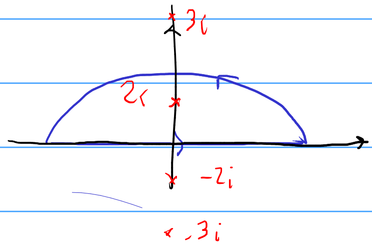
$R \neq 3, R \neq 2$

Caso $R<2$



$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Caso $2<R<3$:



$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \overbrace{Ind_\gamma(2i)}^{1} \cdot Res(f,2i) = 2\pi i \cdot \frac{(2i)^2+2}{4(2i)^3+26\cdot 2i} = 2\pi i \cdot \frac{-2}{-32i+52i}$$

$$= \frac{-2\pi i}{10i} = \frac{-2\pi}{10} = -\frac{\pi}{5}$$

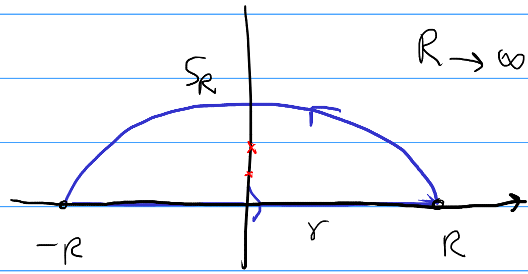
Caso $R>3$: $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = \overbrace{2\pi i \cdot 1 \cdot Res(f,2i)}^{-\pi/5} + 2\pi i \cdot 1 \cdot Res(f,3i)$

$$= -\frac{\pi}{5} + 2\pi i \cdot \frac{(3i)^2+2}{4(3i)^3+26\cdot 3i} = -\frac{\pi}{5} + 2\pi i \cdot \frac{-7}{-108i+78i} = -\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi\cdot 7}{30} = \frac{8\pi}{30} = \frac{4\pi}{15}$$

$$(z_i^2+2) \cdot \frac{1}{4z_i^3+26z_i}$$

c) Calcular $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx$

$R \to \infty$



$S_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0,\pi]$

$\gamma_R(t) = t$, $t \in [-R,R]$

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}\,dz + \int_{S_R} \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+3)}\,dz = \frac{4\pi}{15} \quad \forall R>3.$$

$\gamma_R(t) = t$

$$\underbrace{\int_{\gamma_R} \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+4)}\,dz} + \int_{S_R} \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+3)}\,dz = \frac{4\pi}{15} \quad \forall R>3.$$

$$\underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{t^2+2}{(t^2+9)(t^2+4)}\cdot dt} + \int_{S_R} \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+3)}\,dz = \frac{4\pi}{15} \quad \forall R>3.$$

me interesa $\lim\limits_{R\to+\infty}$

¿Qué sucede con $\lim\limits_{R\to+\infty} \int_{S_R} \frac{z^2+2}{(z^2+4)(z^2+3)}\,dz$?

Como $\lim\limits_{z\to+\infty} z f(z) = 0$ entonces por el Lema 1 a),

$$\int_{S_R} f(z)\,dz \xrightarrow[R\to\infty]{} 0.$$

Entonces, tomo límite con $R\to\infty$ en la siguiente ecuación:

$$\int_{-R}^{R} \frac{t^2+2}{(t^2+9)(t^2+4)}\cdot dt + \int_{S_R} \frac{z^2+2}{(z^2+9)(z^2+3)}\,dz = \frac{4\pi}{15} \quad \forall R>3.$$

llego a:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+2}{(x^2+9)(x^2+4)}\,dx + 0 = \frac{4\pi}{15} \quad //$$

<u>Principio del argumento</u>: Sea γ un camino cerrado contenido en Ω abierto conexo tal que $\operatorname{ind}_\gamma(a) = 0 \ \forall a \notin \Omega$ y $\operatorname{ind}_\gamma(z)$ vale 0 o 1. Sea $\Omega_1 = \{z : \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 1\}$

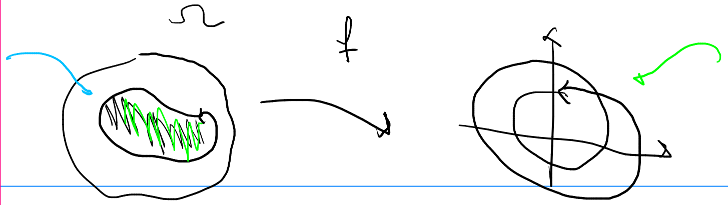
Sea f una función meromorfa. Si f no tiene polos o ceros en $\operatorname{Im}\gamma$ entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(0) = \underbrace{N_f} - \overbrace{P_f}$$

Cantidad de polos de f en Ω_1 con multiplicidad

(Es decir el orden del polo).

Cantidad de ceros de f en Ω_1 con multiplicidad



Si z_0 es un cero de $f(z)$ su orden es el primer n tal que $f^{n}(z_0) \neq 0$.

7. Sea γ_r una cfa de radio r recorrida antihorario, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa tal que $\underbrace{f \circ \gamma_r \text{ no pasa por } z=0}_{\circledast}$ y da tres vueltas entorno a $z=0$.

Probar que f tiene tres raíces de módulo $< r$.

$\Omega_1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < r \}$.

$$3 = \operatorname{ind}_{f\circ\gamma}(0) = N_f - \overset{0 \ (f \text{ es holomorfa})}{P_f} = N_f.$$

Principio del argumento $\circledast$