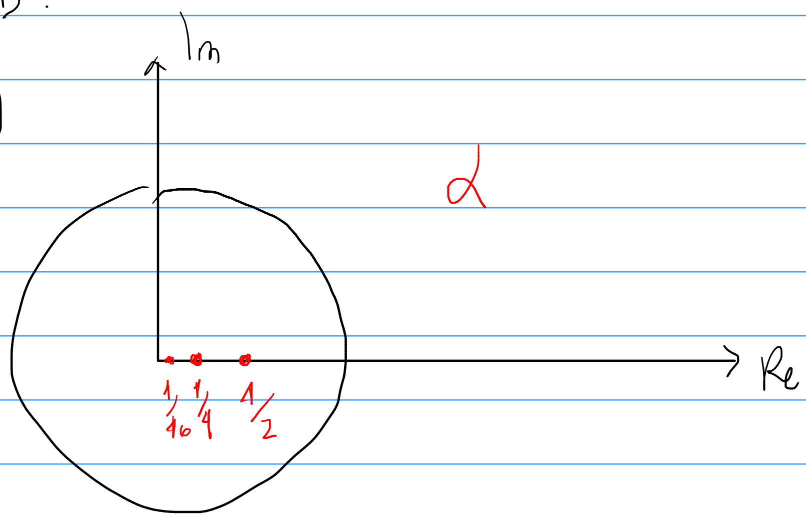
Primer sección:

Teorema de los ceros: Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (abierto y conexo) y $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ tiene un punto de acumulación en Ω entonces $f(z) = 0 \ \forall z \in \Omega$ (es la función nula).

Corolario: Si $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ (abierto y conexo) y $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$ tiene un punto de acumulación en Ω $\Rightarrow f \equiv g$.

Ejercicio 6: Encontrar todas las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ y $f(z^2) = f(z) \ \forall z \in \mathbb{D}$.

Llamémosle $\alpha = f(1/2)$



$f(1/4) = f(1/2) = \alpha$

$f((1/4)^2) = f(1/4) = \alpha$

$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right) = \alpha \quad \forall n \geq 0 \rightsquigarrow$ La función f y la función $g(z) = \alpha \ \forall z \in \mathbb{D}$ coinciden en un conjunto que contiene a $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$. La sucesión $\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \to 0 \in \mathbb{D}$ entonces tengo un punto de acumulación

$\Rightarrow f \equiv g$, es decir $f(z) = \alpha \ \forall z \in \mathbb{D}$.

$\Rightarrow$ Las funciones que cumplen lo pedido son las funciones constantes.

4. Sea $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ holomorfa tal que $\forall a\in\mathbb{C}$, la serie de Taylor centrada en $z=a$ tiene al menos un coeficiente nulo. Probar que es un polinomio.

$C_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, es decir, $\forall a\in\mathbb{C}\ \exists \underbrace{n}_{n(a)}$ tal que $f^{(n)}(a)=0$.

Voy a mirar $\overline{D(0,1)}$, para cada complejo $a\in\overline{D(0,1)}$ tengo $n(a)\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ tal que hay infinitos complejos z con $f^{n_0}(z)=0$.

$n(z)=n_0$

$\Rightarrow$ $Z(f^{(n_0)}) = \{z\in\mathbb{C} : f^{n_0}(z)=0\}$ tiene infinitos elementos en $\overline{D(0,1)}$ (compacto)

$\Rightarrow$ tiene un punto de acumulación en $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f^{(n_0)}(z)=0\ \forall z\in\mathbb{C}$.

$\Rightarrow$ f es un polinomio.

"Integrando"

$f^{(10)}\equiv 0 \Rightarrow f^{(9)}(z)=C$

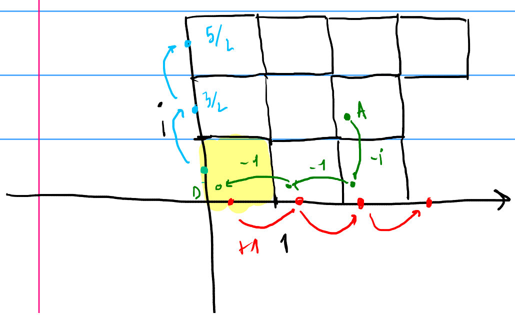
$\Rightarrow f^{(8)}(z)=Cz+D \Rightarrow f^{(7)}(z)=\frac{Cz^2}{2}+Dz+K$.

...

Teorema de Liouville: $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y está acotada $\Rightarrow$ f es constante

($\exists\, M>0$, $|f(z)|<M\ \forall z\in\mathbb{C}$).

8b) $f\in\mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f(z)=f(z+1)$ y $f(z+i)=f(z)\ \forall z\in\mathbb{C}$.



$\Rightarrow$ $f(\mathbb{C}) = f([0,1]\times[0,1])$

Pero f es continua y $[0,1]\times[0,1]$ es compacto

$\Rightarrow$ $|f|$ tiene máximo, es decir $\exists\, M$, $M=|f(z_0)|\geq|f(z)|\ \forall z\in\mathbb{C}$

$\Rightarrow$ f está acotada $\Rightarrow$ f es cte.

Def: $a \in \Omega$ se dice singularidad aislada de f si $f \in H(B^*(a,\varepsilon))$.

Teorema: Ocurre una (y sólo una) de las tres posibilidades siguientes:

1) f tiene una singularidad evitable en $z=a$, es decir, $\exists$ F extensión de f que es derivable en $z=a$. $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f$ existe y es finito $\Leftrightarrow$ f es acotada en un entorno de a

$\lim_{z \to a} f = \infty$ $\Leftrightarrow$ 2) $\exists$ $m>0$, y $C_1, \dots, C_m \in \mathbb{C}$ con $C_m \neq 0$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \frac{C_1}{z-a} + \frac{C_2}{(z-a)^2} + \dots + \frac{C_m}{(z-a)^m} \quad \forall z \text{ en un entorno pinchado de } z=a.$$

3) $\overline{f(D^*(a,R))} = \mathbb{C}$ $\forall R>0$. $\Leftrightarrow \lim_{z \to a} f$ no existe.

Obs de 2): m se puede encontrar así: es el que cumple $\lim_{z \to a} (z-a)^m f(z) = C_m \neq 0$.

11) $\begin{cases} f: \mathbb{C}-\{0\} \to \mathbb{C} \\ f(z) = \dfrac{\sin z}{z} \end{cases}$ Estudiar la singularidad en cero.

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} \overset{0/0}{\underset{}{\overset{?}{=}}} \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = \cos 0 = 1$$

$\rightsquigarrow$ La singularidad es evitable: es decir se puede extender f a una función holomorfa $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Concluir que $\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz = 0$ $\forall \gamma \subset \mathbb{C}$ cerrada:

$$\int_\gamma \frac{\sin z}{z} dz = \int_\gamma F(z)\, dz \overset{\text{Cauchy}}{=} 0$$

12) $\dfrac{(z-\pi)}{z^4 \sin(z)}$, $z=0$

$$\lim_{z\to 0} \frac{-\pi}{0} = \infty \,, \rightsquigarrow \text{Polo.}$$ Quiero ver el orden (m).

$$\lim_{z\to 0} z^n \frac{(z-\pi)}{z^4(\sin(z))}$$ puedo resolver esto para cada n, el ! n tal que me dé finito y distinto de cero es el orden, m.

$$\to \frac{-\pi}{1}$$

$$\lim_{z\to 0}\frac{(z-\pi)\cdot z^n}{z^4\cdot\left(z-\frac{z^3}{3!}+\dots\right)} = \lim_{z\to 0}\boxed{\frac{(z-\pi)}{\left(1-\frac{z^2}{3!}+\dots\right)}}\cdot\frac{z^n}{z\cdot z^4} = -\pi\cdot\lim_{z\to 0} z^{n-5} = \begin{cases}-\pi & \text{si } n=5\\ \infty & \text{si } n<5\\ 0 & \text{si } n>5\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Polo de orden 5.