Resumen:

Def: $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con Ω abierto se dice holomorfa si existe el límite

$$f'(z) = \lim_{\omega \to z} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z}, \ \forall z \in \cancel{\mathbb{C}}.\Omega$$

$$f(x+iy) = \underbrace{u(x,y)}_{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}} + i \underbrace{v(x,y)}$$

Teorema: Si f es derivable en $z = x+iy$ entonces existen las derivadas parciales de u y v en (x,y). Más aún, u y v son diferenciables en (x,y) y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} \partial_x u(x,y) = \partial_y v(x,y) \\ \partial_y u(x,y) = -\partial_x v(x,y) \end{cases}$$

Teo: Si u y v son diferenciables en (x,y) y vale CR en (x_0,y_0) $\Rightarrow$ $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ es holomorfa en $z = x_0 + iy_0$

$x+iy$

$$f'(z) = \partial_x u(x,y) + i \partial_x v(x,y)$$

Corolario: $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Leftrightarrow u, v$ son derivables con derivada continua en Ω y satisfacen $\begin{cases} \partial_x u = \partial_y v \\ \partial_y u = -\partial_x v \end{cases}$

Prop: La composición de holomorfas es holomorfa y vale la regla de la cadena.

Teorema: Si $f: \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $D(z_0, R) \subset \Omega$ entonces f puede expandirse como series de potencias en $D(z_0,R)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0,R)$$

Corolario: Si $f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow$ es infinitamente derivable.

1) b) $f(z) = \bar{z}$ donde es derivable?

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x,-y)$ es diferenciable

$u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$.

¿Vale CR? :

$1 = \partial_x u = \partial_y v = -1$ X. $\Rightarrow$ No es derivable en $\mathbb{C}$ en ningún punto.

$(x,y) \overset{f}{\mapsto} (u(x,y), v(x,y))$

3) a) Mostrar que si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(\overset{x+iy}{z}) = u(x,y) + i v(x,y)$ holomorfa entonces el $\det J_{(x,y)} f = |f'(x+iy)|^2$.

$\partial_x u = \partial_y v$

$\partial_y u = -\partial_x v$

$$J_{(x,y)} f = \begin{pmatrix} \partial_x u(x,y) & \overbrace{\partial_y u(x,y)}^{-\partial_x v} \\ \partial_x v(x,y) & \partial_y v(x,y) \end{pmatrix} \overset{CR}{=} \begin{pmatrix} \partial_x u & -\partial_x v \\ \partial_x v & \partial_x u \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det = (\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 = |\partial_x u + i \partial_x v|^2 = |f'(x+iy)|^2.$

4) b) Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ (abierto y conexo) y cumple que $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$, entonces f es constante.

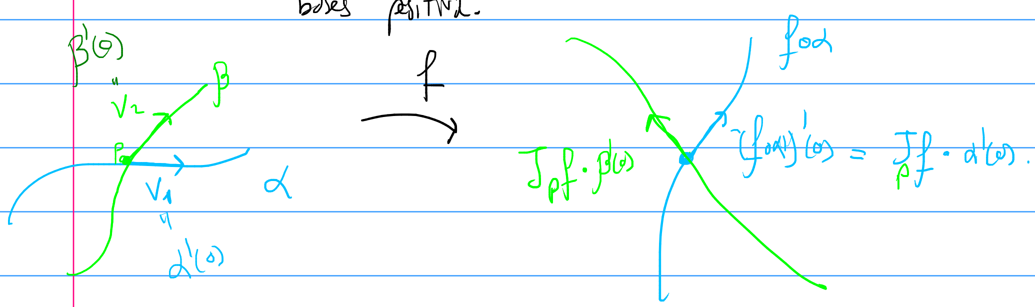
$f(x+iy) = u(x,y) + i \underbrace{v(x,y)}_{\equiv 0}$ y $\partial_x u = \partial_y v \equiv 0$, $\partial_y u = -\partial_x v \equiv 0$ $\leadsto \nabla u = \vec{0} \ \forall p \in \Omega$.

$\Rightarrow u(x,y)$ es constante $\Rightarrow f$ lo es //.

5) a) Probar que $f: \underset{\mathbb{R}^2}{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $f'(z) \neq 0 \ \forall z$ entonces preserva orientación.

* Una base de $\mathbb{R}^2$ $\{v_1, v_2\}$ está orientada positivamente si cumple la regla de la mano derecha.

▶ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preserva la orientación si $J_{(x,y)} f$ lleva bases positivas en bases positivas.



*) $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, preserva orientación sii $\det J_{(x,y)} f > 0 \ \forall (x,y)$.

$\det J_{(x,y)}f \underset{\uparrow}{=} |f'(x+iy)|^2 > 0$ → Preserva orientación.

f holomorfa

por hipótesis no es cero.

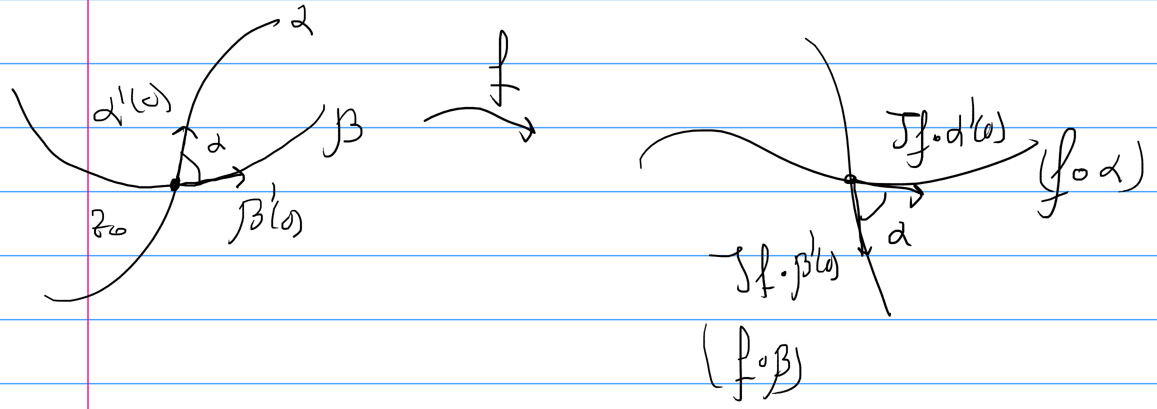
b) Si $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa y $f'(z) \neq 0 \ \forall z \Rightarrow$ es conforme.

(Preserva ángulos).

* Tomo v y w, $\dfrac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ vs $\dfrac{\langle Jf \cdot v, Jf \cdot w \rangle}{\|Jf \cdot w\| \cdot \|Jf \cdot v\|}$

* Me paro en $z_0 \in \mathbb{C}$ y tomo α, β dos curvas con $\alpha(0) = \beta(0) = z_0$

y $\alpha'(0) \neq 0$.
$\beta'(0) \neq 0$



$$(f \circ \alpha)'(0) = f'(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = f'(z_0) \cdot \alpha'(t_0)$$

$$(f \circ \beta)'(0) = f'(\beta(0)) \cdot \beta'(0) = f'(z_0) \cdot \beta'(t_0).$$

Los vectores originales son $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(t_0)$; los vectores luego de aplicar f son $f'(z_0) \cdot \alpha'(t_0)$ y $f'(z_0) \cdot \beta'(t_0)$.

Pero multiplicar por $f'(z_0) = \rho \cdot e^{i\varphi}$ es girar φ y agrandar ρ.

Pero es el mismo ρ y φ para v y w $\Rightarrow$ Preservan ángulo

c) Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que preserva orientación y es conforme

entonces $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es holomorfa.

Me paro en $z_0 = x_0 + iy_0$ y tomo $\{e_1, e_2\}$ base usual de $\mathbb{R}^2$

e_1 y e_2 son perpendiculares $\Rightarrow$ $\underset{(x_0,y_0)}{Jf} \cdot e_1$ y $\underset{(x_0,y_0)}{Jf} \cdot e_2$ son perpendiculares

$$\left.\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \partial_x u \\ \partial_x v \end{pmatrix}} \\ \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y u \\ \partial_y v \end{pmatrix} \end{array}\right\} \text{ Son perpendiculares.}$$

$\Leftrightarrow$ $(\partial_x u, \partial_x v) = \lambda(\partial_y v, -\partial_y u)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda = \lambda(x_0, y_0)$

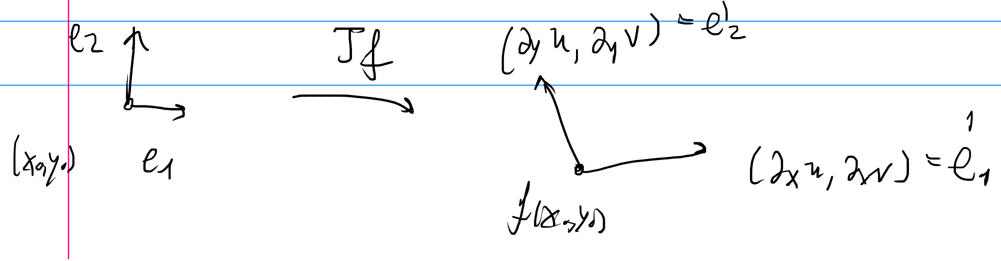
$$(*) \begin{cases} \partial_x u = \lambda \partial_y v \\ \partial_x v = -\lambda \partial_y u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x u = \lambda \partial_y v \\ \partial_y u = -\frac{1}{\lambda} \cdot \partial_x v \end{cases}$$

Si $\lambda(x_0, y_0) = 1$ $\forall (x_0, y_0)$ gané.

Preserva orientación.

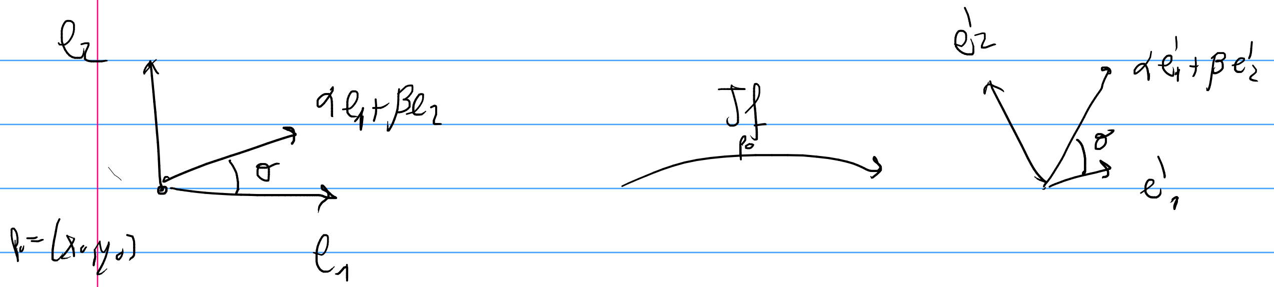
Primero $\lambda > 0$:

$$Jf = \begin{pmatrix} \partial_x u & -\frac{1}{\lambda} \partial_x v \\ \partial_x v & \frac{1}{\lambda} \partial_x u \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} \left((\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2 \right) \cdot \frac{1}{\lambda} > 0$$



$$\|e_1'\| = \sqrt{(\partial_x u)^2 + (\partial_x v)^2} \qquad \partial_x u = \lambda \partial_y v$$

$$\|e_2'\| = \sqrt{(\partial_y u)^2 + (\partial_y v)^2} = \lambda \|e_1'\|. \qquad \partial_x v = -\lambda \partial_y u$$



$$\cos\sigma = \frac{\langle \alpha e_1 + \beta e_2, e_1\rangle}{\underbrace{\|\alpha e_1 + \beta e_2\|}\,\underbrace{\|e_1\|}_{1}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$$

$$\frac{\langle \alpha e_1' + \beta e_2', e_1'\rangle}{\|\alpha e_1' + \beta e_2'\| \, \|e_1'\|} = \frac{\alpha \|e_1'\|^2}{\sqrt{\alpha^2 \|e_1'\|^2 + \beta^2 \|e_2'\|^2} \cdot \|e_1'\|}$$

$\|e_2'\| = \lambda \|e_1'\|$

$$= \frac{\alpha \|e_1'\|^2}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2\beta^2}\, \|e_1'\| \, \|e_1'\|} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2\beta^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\lambda^2\beta^2}} \quad \forall \alpha, \beta. \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1.$$

$\Rightarrow$ Vale CR $\Rightarrow$ $f = u + iv$ es holomorfa.