Resumen de series de potencias

Def Una serie de potencias es una serie de funciones de la forma $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \cdot (z-a)^n$ con $a \in \mathbb{C}$ y $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números complejos.

$\lim_{n\to+\infty} \sup\{a_s : s \geq n\} = b_n$

Def El radio de convergencia de una serie de potencias es un número $R \in [0,+\infty]$ definido como

$$R := \left[\limsup_{n\to+\infty} |c_n|^{1/n}\right]^{-1}$$

$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right)$
$\{a_n\}$ sucesión de reales

* Si $\{a_n\}$ sucesión de reales tiene límite entonces $\limsup a_n = \lim a_n$.

Prop: Una serie de potencias con radio R converge puntualmente en $D(a,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$ y diverge en $\left(\overline{D(a,R)}\right)^c$. Además converge uniformemente en todo compacto incluido en $D(a,R)$.

Prop: La serie $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n$ es derivable y su derivada es $\sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot c_n (z-a)^{n-1}$. Esta serie tiene el mismo radio de convergencia.

Ej 1 a) Hallar radio de convergencia y una fórmula para la serie

$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$, es la serie geométrica de factor z.

Converge para $|z|<1$ y diverge para $|z|>1$. $\Rightarrow R = 1$.

$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ → Fórmula de series geométricas

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} n z^n = z \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} n z^{n-1} = z \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)'$. Entonces

* $R = 1$ * $\sum_{n=1}^{+\infty} n z^n = z \cdot \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{z}{(1-z)^2}$

Ej 2 c) Expandir en series de potencias de z las siguientes funciones y encontrar el radio de convergencia. Es decir, encontrar $\{C_n\}$ /

$$f(z) = \frac{1}{4+z} = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n z^n \quad \forall z \in B(0, \underbrace{\varepsilon}) \text{ a buscar.}$$

Forma 1: Si existe dicha serie $\Rightarrow$ $C_0 = f(0)$, $f'(0) = (C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \dots)'\Big|_{z=0} = C_1$

$f''(0) = 2C_2$, $f'''(0) = 3!C_3$ ... $\Rightarrow$ $C_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$! $\Rightarrow$ es la serie de Taylor

¿Necesariamente $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ en un entorno de $z=0$? Si

En general la serie de Taylor de una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ no tiene porque parecerse a f. Sin embargo, en variable compleja si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ entonces sí, localmente!.

Forma 2: $$\frac{1}{4+z} = \frac{1/4}{1+z/4} = \frac{1/4}{1-(-z/4)} = \frac{1/4}{1-\omega}\Bigg|_{\omega = -z/4} = \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{-z}{4}\right)^n$$

$\forall z$: $\left|\frac{-z}{4}\right| < 1$ es decir $|z| < 4$

$$\Rightarrow \frac{1}{4+z} = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^n}{4^n} \quad \forall |z| < 4 \quad \text{y además } R = 4.$$

Ej 4: a) ¿Se puede definir $\log(1-z)$ en la $B(0,1)$ y que sea continua?

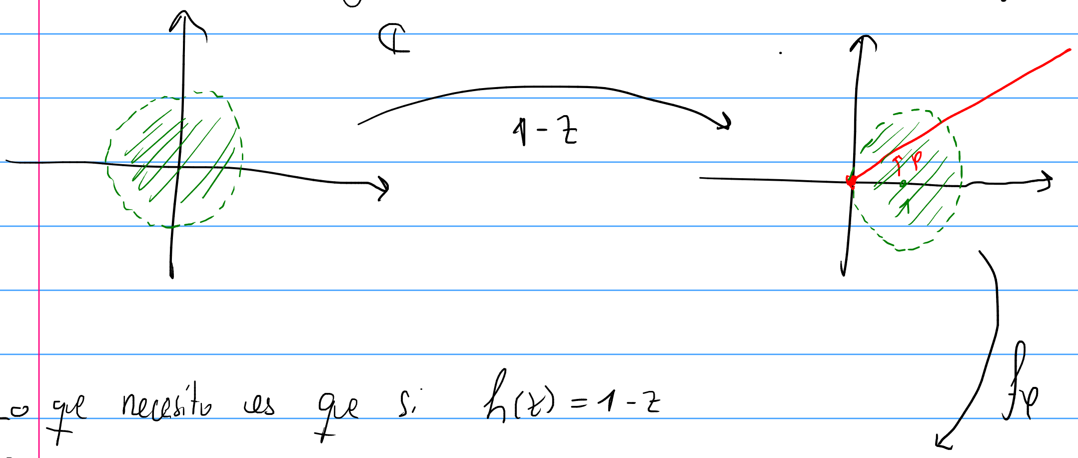
Es decir, existe algún logaritmo tal que $\log(1-z)$ queda continuo en $B(0,1)$?

Probemos con los logaritmos clásicos, es decir,

$f_\varphi : \mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : z = re^{i\varphi}, r \geq 0\} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \log(|z|) + i\,\mathrm{Arg}_{(\varphi, \varphi+2\pi)}(z)$

son continuos, de hecho derivables y $f_\varphi'(z) = 1/z$.

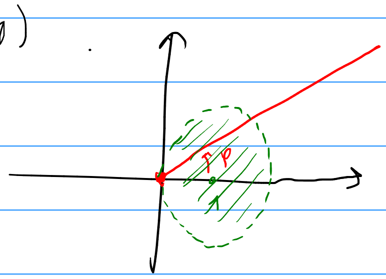
Yo quiero que la función $g(z) = f_\varphi(1-z)$ esté definida en $B(0,1)$.
Si ocurre esto, g es continua por ser composición de funciones continuas.



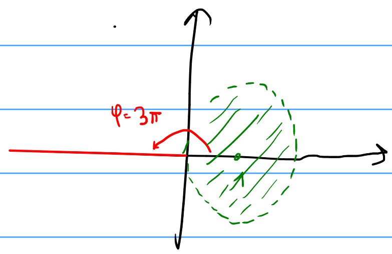
Lo que necesito es que si $h(z) = 1-z$

$$h(B(0,1)) \subset \mathrm{Dom}(f_\varphi)$$
$$\overset{\parallel}{B(1,1)}$$

$*$ $\mathrm{Dom}\, f_\varphi$ = Todo menos lo rojo



No cumple



Este sí

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Log} : \mathbb{C} - \{ z \in \mathbb{C} : z = re^{i\pi},\ r \geq 0 \} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\mathrm{Log}(z) = \log|z| + i\, \mathrm{Arg}_{[3\pi, 5\pi)}(z)$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Log}(1-z)$ es derivable en $B(0,1)$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$, $\quad \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{z^n}{n} \right)' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -z^n = \frac{-1}{1-z}$, $\quad \forall\, |z| < 1$.

$$(\mathrm{Log}(1-z))' = \frac{-1}{1-z} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-z^n}{n} \right)' = \mathrm{Log}(1-z)' = \frac{-1}{1-z}$$

$\Rightarrow -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ y $Log(1-z)$ en $B(0,1)$ son primitivas de $\frac{-1}{1-z}$.

Como $B(0,1)$ es conexo $\Rightarrow \exists\, C \in \mathbb{C},\ -\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n + C = Log(1-z)$

Digresión. $f : (0,1) \cup (2,3) \to \mathbb{R}$, $f' \equiv 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,1) \\ 2 & \text{si } x \in (2,3) \end{cases}$$

$-\sum_{n=1}^{+\infty} z^n/n + C = Log(1-z)$, evalúo en $z=0 \Rightarrow C = Log(1) = i Arg_{(3\pi, 5\pi]}(1)$

$= i \cdot 4\pi$

$$\Rightarrow Log(1-z) = 4\pi i - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \quad //.$$