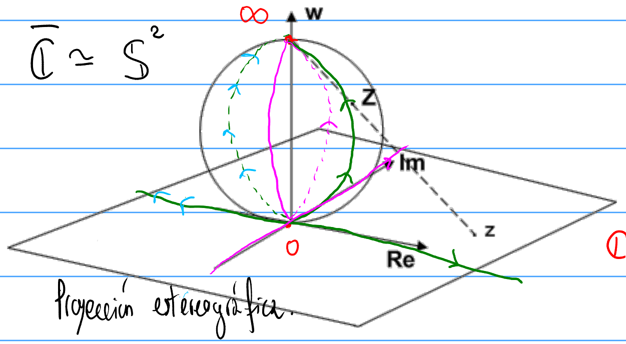
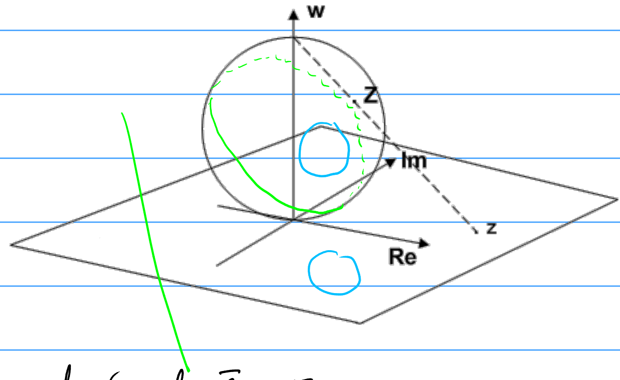
Transformaciones de Möbius

Sea $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con la topología adecuada ($z_n \to \infty \Leftrightarrow |z_n| \to +\infty$)

$\overline{\mathbb{C}} \simeq S^2$



Proyección estereográfica.



Def: Una transformación de Möbius es una función $f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ dada por $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$

$\mathcal{M} := \{ f: \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}} \text{ de Möbius} \}$ ¿ $f(\infty)$, $f(-d/c)$?

Prop:
- Si $\varphi, \psi \in \mathcal{M} \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \mathcal{M}$
- Si $\varphi \in \mathcal{M} \Rightarrow$ es invertible y $\varphi^{-1} \in \mathcal{M}$.
- Son homeomorfismos: son continuos y la inversa también.

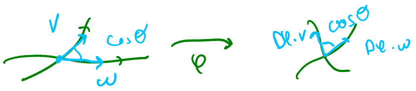
Ejemplos:
- Traslaciones: $\varphi(z) = z + b$
- Rotaciones: $\varphi(z) = az$, $|a| = 1$
- Homotecias: $\varphi(z) = rz$, $r \in \mathbb{R}_{>0}$
- Inversión: $\varphi(z) = 1/z$

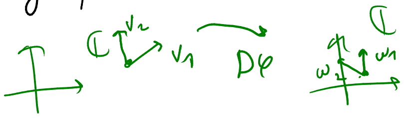
Prop: Si $\varphi \in \mathcal{M}$ entonces φ es composición de las transformaciones ejemplo

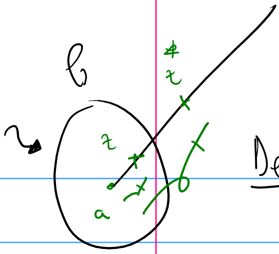
Prop: Si $\varphi \in \mathcal{M}$ y $\mathcal{C}$ es una circunferencia o recta $\Rightarrow \varphi(\mathcal{C})$ también.

Prop: Dado $a, b, c \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos y $a', b', c' \in \overline{\mathbb{C}}$ distintos dos a dos entonces existe una única transformación de Möbius φ tal que $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$ y $\varphi(c) = c'$.

Prop: Si $\varphi \in \mathcal{M} \Rightarrow \varphi$ es conforme (preserva ángulos) y preserva orientación.

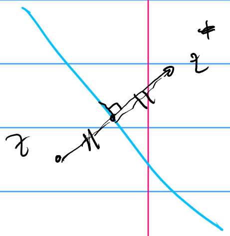






Def: (Puntos inversos) • Dos puntos z y z^* $\in \overline{\mathbb{C}}$ son inversos respecto a un círculo $\mathcal{C}$ si se encuentran en una misma semirrecta que pasa por el centro del círculo y el producto de sus distancias al centro es R^2

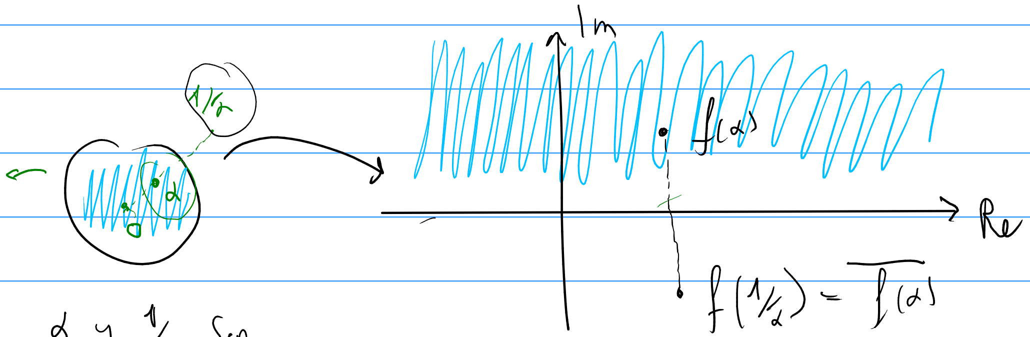
($\Leftrightarrow$ $\overline{(z-a)}\,(z^*-a) = R^2$)



• Dos puntos $z, z^* \in \overline{\mathbb{C}}$ son inversos respecto a una recta r si r es la mediatriz.

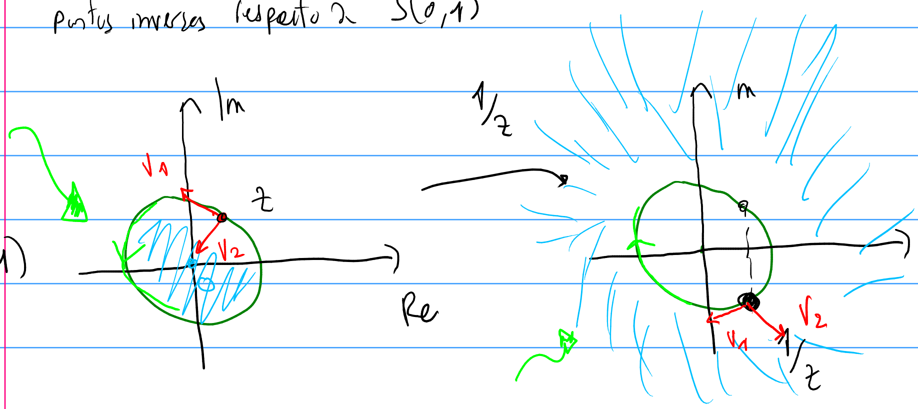
Prop: Si $\varphi \in \mathcal{M}$ $\Rightarrow$ φ lleva puntos inversos en puntos inversos.

$S(0,1)$



α y $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ son puntos inversos respecto a $S(0,1)$

$S(0,1)$



$z = \rho e^{i\theta}$ $\quad \rho = 1$

$\frac{1}{z} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$

2. a) Hallar la transformación de Möbius con $f(0) = -1$, $f(i) = 0$, $f(\infty) = 1$

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad$ • $f(\infty) = 1 \to c \neq 0$ y $f(\infty) = \frac{a}{c} = 1$ $\quad$ $ai+b=0$

$c = 0$?

$\Rightarrow f(z) = \frac{az+b}{az+d} = \frac{a}{a} \cdot \frac{z+b/a}{z+d/a} = \frac{z+b'}{z+d'}$

$f(z) = \frac{k\cdot(z-i)}{cz+d}$

$= \frac{z-i}{c'z+d'}$

$f(\infty) = 1 \Leftrightarrow c' = 1$

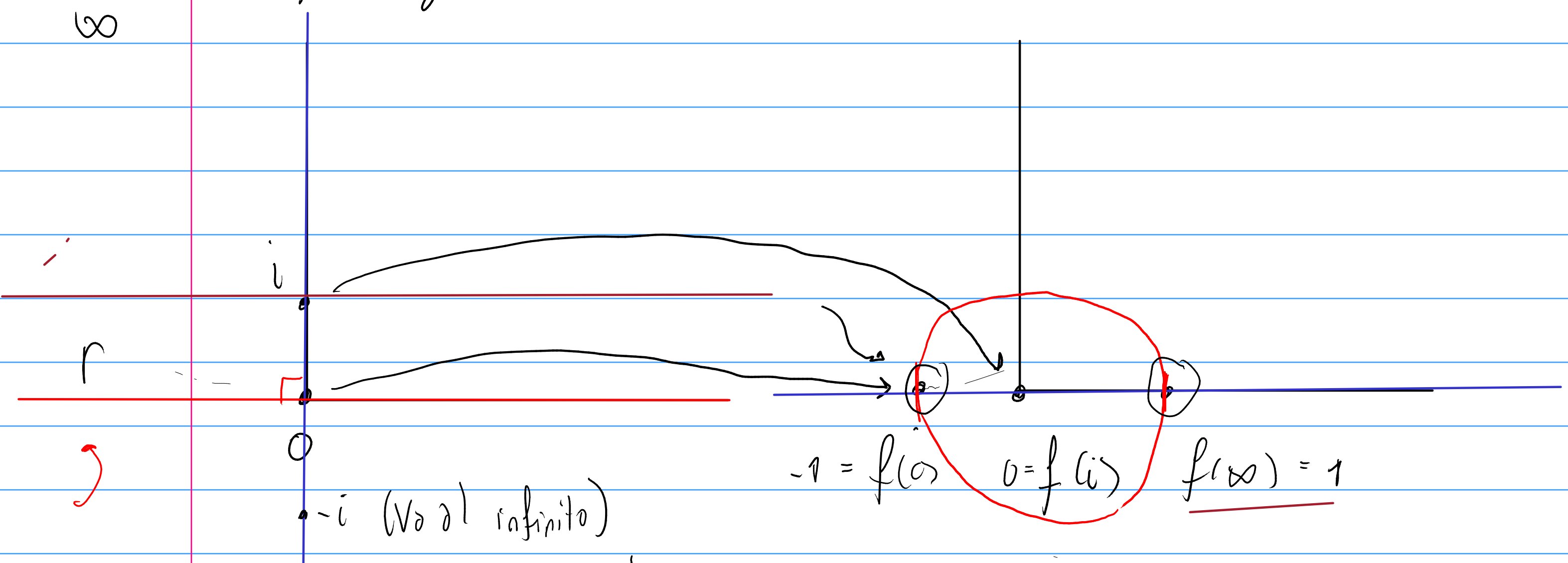
$f(i) = 0 \Leftrightarrow \quad f(z) = \dfrac{z-i}{z+d'}$

$f(0) = -1 \Leftrightarrow f(0) = \dfrac{-i}{d'} = -1 \Rightarrow d' = i$

$\Rightarrow f(z) = \dfrac{z-i}{z+i} \quad\quad f(-i) = \infty$

b) Determine la imagen de los siguientes conjuntos

• El eje imaginario :



$\{z_1, z_2, \infty\} \in$ Eje imaginario extendido

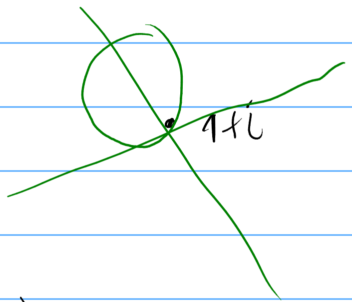
$0, \infty \in$ Recta r ya

• $f(r)$ es recta $\Leftrightarrow \infty \in f(r) \Leftrightarrow \underbrace{f^{-1}(\infty)}_{\substack{-i \\ ॥}} \in r$

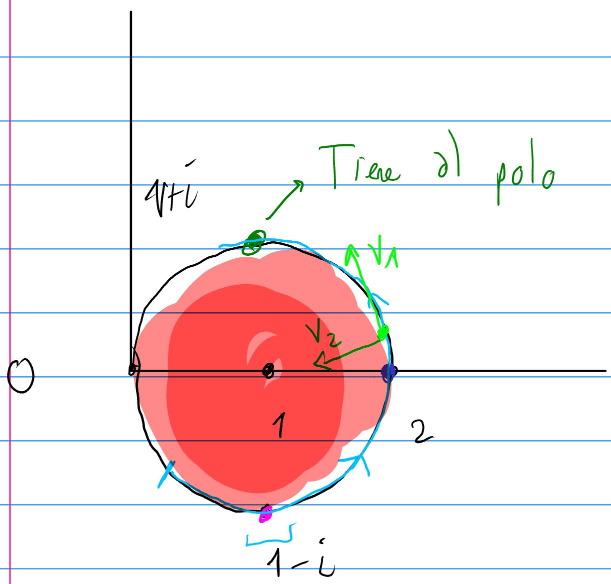
9. Sea $\phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ de Möbius con $\phi(2) = 2$, $\phi(1-i) = 2+i$,
$\phi(1+i) = \infty$

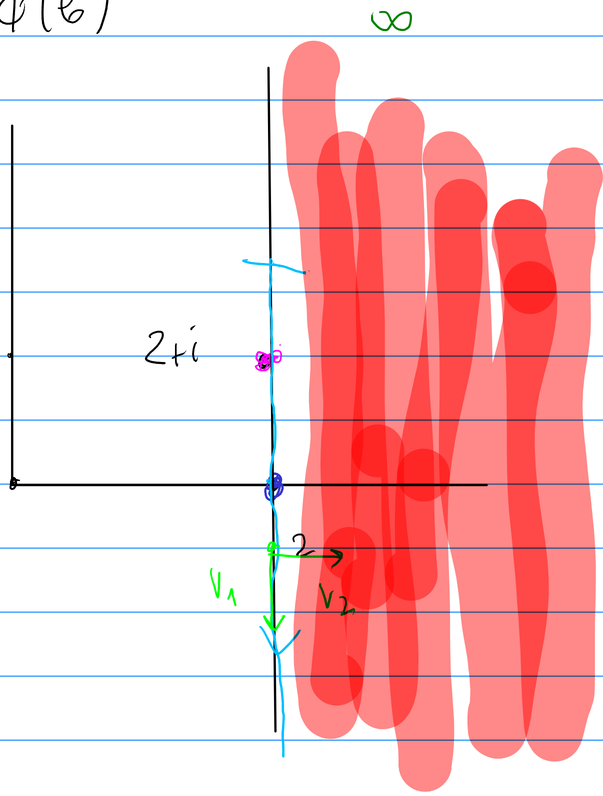
a) $\mathcal{C} \subset \mathbb{C}$ circunferencia. Hallar condición necesaria y suficiente para que $f(\mathcal{C})$ sea una recta.

$f(\mathcal{C})$ es recta $\iff \infty \in f(\mathcal{C}) \iff f^{-1}(\infty) \in \mathcal{C} \iff 1+i \in \mathcal{C}$.

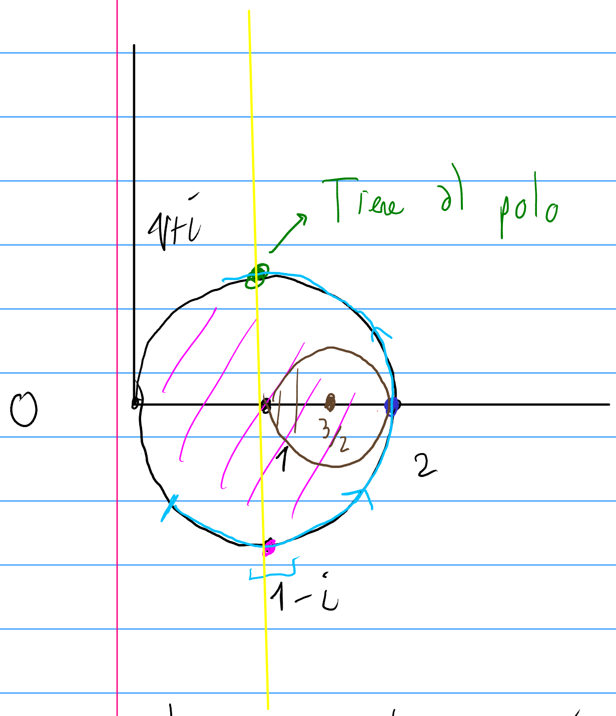


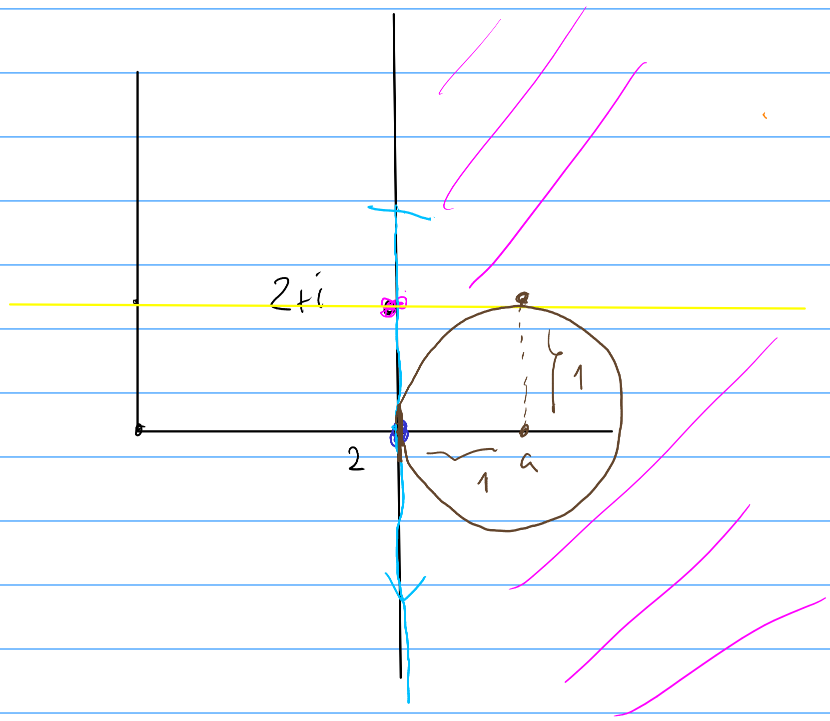
b) $\mathcal{C} = \partial B(1,1)$, Hallar $\phi(\mathcal{C})$





- El interior va a ir a la izquierda o a la derecha no hay otra opción. Me fijo en un punto y averiguo cual de las dos opciones es. La otra forma de averiguarlo es usar que preserva orientación c)





* La imagen de la cfa marrón es una cfa (no toca el polo) que está en el semiplano derecho pasa por $\phi(2)=2$ tangente a la recta celeste $\{z : Re(z)=2\} = \phi(\partial B(0,1))$.

* La cfa $|z-3/2|=1/2$ es tangente a la recta amarilla $Re(z)=1$
$\Rightarrow$ La cfa imagen es tangente $\phi(\{Re(z)=1\}) = \{Im(z)=1\}$