+ Producto de complejos : $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un cuerpo

* $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

$x+iy \leftrightarrow (x,y)$

* En este curso vamos a hacer análisis con los complejos.

derivadas, integrales.

$i^2=-1$

$(x+iy)\cdot(\tilde{x}+i\tilde{y}) = (x\tilde{x}-y\tilde{y}) + i\,(y\tilde{x}+\tilde{y}x)$

Distributiva

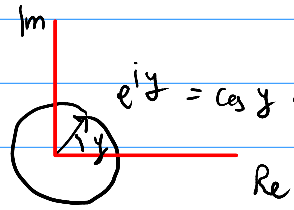
5) ¿Argumento de un complejo $z \neq 0$?

Ángulo

- $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}-\{0\}$, $f(z) = e^z = e^{Re(z)}\cdot(\cos Im(z) + i \,\mathrm{sen}\, Im(z))$ [Ej 4].

Es sobreyectiva $\Rightarrow \forall w \neq 0,\ \exists z = x+iy,\ w = e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in\mathbb{R}^+}\cdot\underbrace{e^{iy}}_{\text{Módulo } 1}$

$\boxed{w = |w|\cdot\underbrace{e^{iy}}_{\text{Módulo } 1}}$



$e^{iy} = \cos y + i \,\mathrm{sen}\, y$

Probar : Si $z\neq 0$, existen n raíces enésimas (n soluciones de la ec $w^n = z$).

¿ $w^n = z$? $\quad w$ incógnita, $\quad w = \underset{?}{\rho}\, e^{i\underset{?}{\varphi}}$, $\rho>0$

$z = |z|\cdot e^{i\varphi_z}$

$(\rho e^{i\varphi})^n = |z| e^{i\varphi_z}$

$\rho^n e^{in\varphi} = |z| e^{i\varphi_z} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho^n = |z| \\ n\varphi = \varphi_z + k2\pi, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{|z|} \\ \varphi = \dfrac{\varphi_z + k2\pi}{n}, \quad k\in\mathbb{Z} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad w = \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{(\varphi_z+2k\pi)}{n}}, \quad k\in\mathbb{Z}$

$= \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi_z}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad k\in\mathbb{Z},$

Para $k=0$ $\quad \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\varphi_z}{n}}$

Para $k=1$ $\quad \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\left(\frac{\varphi_z}{n}+\frac{2\pi}{n}\right)}$

$\vdots$

Para $k=n$ $\quad \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\left(\frac{\varphi_z}{n}+2\pi\right)} = \sqrt[n]{|z|}\, e^{i\frac{\varphi_z}{n}}$

* El módulo de un complejo z, $|z|$, me induce una distancia entre complejos

$$d(w,z) = |\underset{a+ib}{w} - \underset{x+iy}{z}| = \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} = \|(a,b)-(x,y)\| = d_{\mathbb{R}^2}((a,b),(x,y))$$

$\Rightarrow$ • $U \subset \mathbb{C}$ es abierto si y solo si lo es como subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

• $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es continua si y sólo si lo es como función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Ej: $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$

$$f(x+iy) = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^x \cdot \cos y + i\, e^x \operatorname{sen} y$$

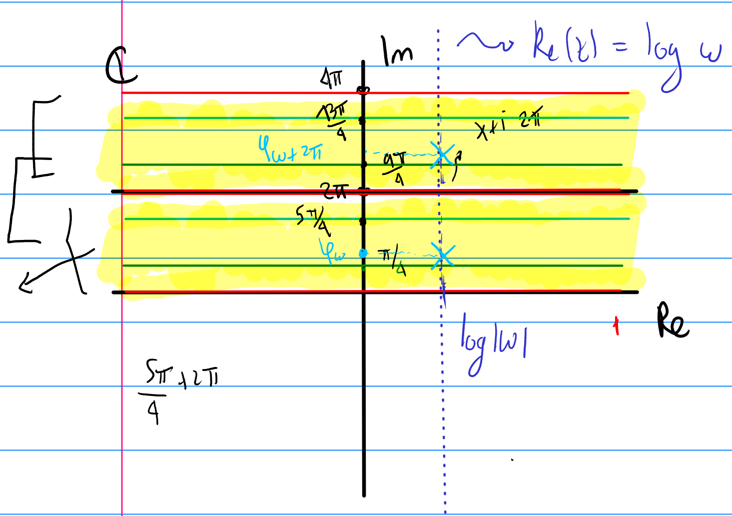
$$\tilde{f}(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y), \quad \tilde{f}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \text{ continua}$$

7. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}-\{0\}$, $f(z) = e^z$ es sobreyectiva

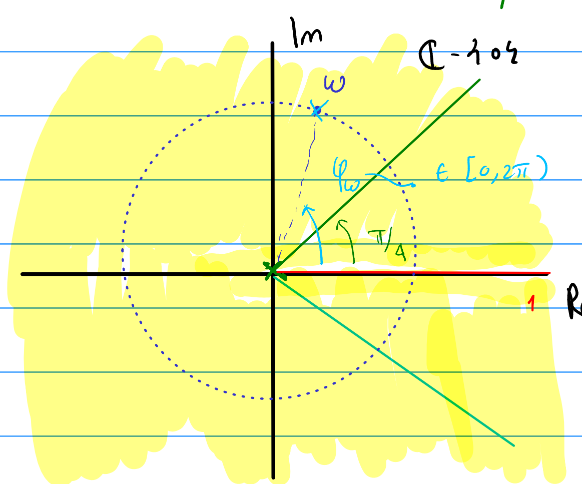
$f(x+iy) = \underbrace{e^x}\cdot\underbrace{(\cos y + i \operatorname{sen} y)}$, ¿es inyectiva?

- $f(w) = f(z) \Leftrightarrow \underbrace{e^{\operatorname{Re}(w)}} \cdot \underbrace{e^{i\operatorname{Im}(w)}}_{\text{Módulo 1}} = \underbrace{e^{\operatorname{Re}(z)}} \cdot \underbrace{e^{i\operatorname{Im}(z)}}_{\text{Módulo 1}} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(w) = \operatorname{Re}(z) \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(w) + 2k\pi \end{cases}$

No inyectiva.



e^z



Tomo $w \in \mathbb{C}-\{0\}$, quienes son los complejos z tal que $|e^z| = |w| \Leftrightarrow e^{\operatorname{Re}(z)} = |w|$
$\Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \log|w|$.

Si $z = \log|w| + iy \Rightarrow e^z = e^{\log|w|} \cdot e^{iy} = \underbrace{|w| e^{iy}}$, $y \in \mathbb{R}$

$\underbrace{e^{i\varphi_w}|w|}$ ($\varphi_w \in [0,2\pi)$) $= \underbrace{w} = e^{z} = e^{Re(z)} \cdot e^{i\,Im(z)} \iff \begin{cases} |w| = e^{Re(z)} \rightsquigarrow Re(z) = \log|w| \\ Im(z) = \varphi_w + 2k\pi \end{cases}$

z ?

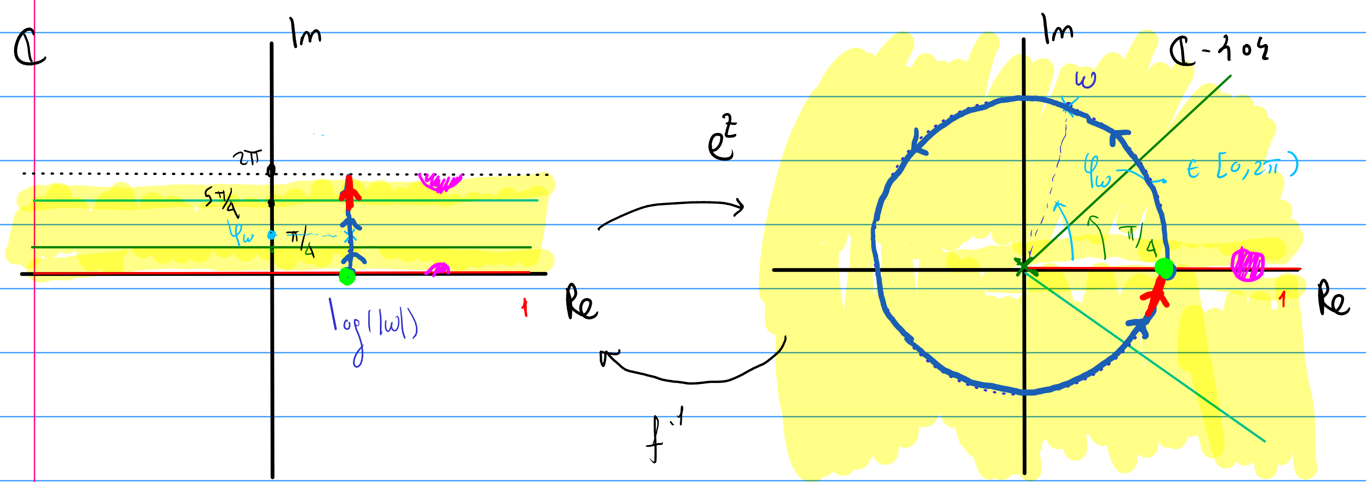
f no es invertible.

$f : \{z \in \mathbb{C} : 0 \le Im(z) < 2\pi\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ es biyectiva

$f(z) = w \Rightarrow z = f^{-1}(w) = \log|w| + i \cdot \underline{Arg(w)}$

Ángulo de w en $\underline{[0,2\pi)}$

o, a.



$f : \{z \in \mathbb{C} : 0 \le Im(z) < 2\pi\} \to \mathbb{C} - \{0\}$ es biyectiva

$f^{-1}(w) = \log|w| + i\, Arg_{[0,2\pi)}(w)$, $f^{-1} : \mathbb{C} - \{0\} \to \{z \in \mathbb{C} : 0 \le Im(z) < 2\pi\}$

$\Rightarrow f^{-1}$ no es continua en $\{w : Re(w) > 0, Im(w) = 0\}$

* $f : \{z \in \mathbb{C} : 0 < Im(z) < 2\pi\} \to \mathbb{C} - \{w : Re(w) \ge 0, Im(w) = 0\}$ es invertible, y su inversa es

$f^{-1}(w) = \log(w) + i\, Arg_{(0,2\pi)}(w)$, $f^{-1} : \mathbb{C} - \{w : Re(w) \ge 0, Im(w) = 0\} \to \{z \in \mathbb{C} : 0 < Im(z) < 2\pi\}$ es continua.

Una manera de ver que es continua rigurosamente es la siguiente:

- $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to W \subset \mathbb{R}^2$, U, W abiertos $+$ $J_{(x,y)}f$ es invertible $\forall (x,y) \in U$ $\Big\} \Rightarrow$ La inversa es diferenciable como función de $\mathbb{R}^2$ en particular es continua.