Circuitos

Elementos de un circuito

Pablo Monzón

IIE-Fing-UDELAR

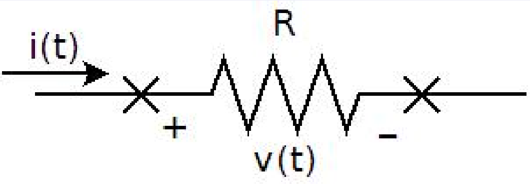
Segundo semestre, 2024

Elementos de un circuito

A continuación presentamos los elementos más comunes que conformarán los circuitos que analizaremos.

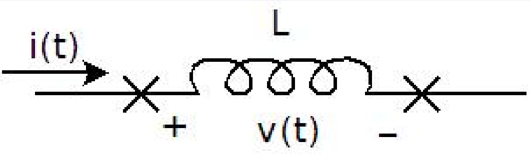
Un elemento tiene por lo general dos terminales y se describe por la relación entre la *tensión en bornes* y la *corriente que lo atraviesa*, usualmente dada por una *ley* física.

Resistencia: $v(t) = R\,i(t)$ (Ley de Ohm)

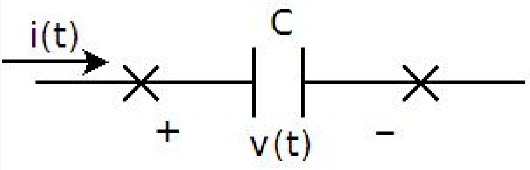


Elementos de un circuito

Inductancia: $v(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$, $i(0) = i_0$

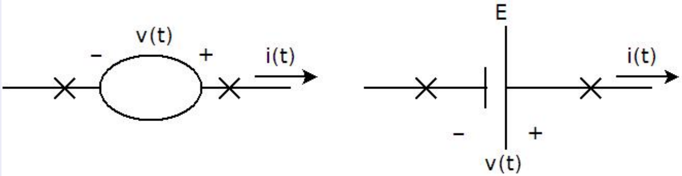


Condensador: $i(t) = C\frac{d}{dt}v(t)$, $v(0) = v_0$



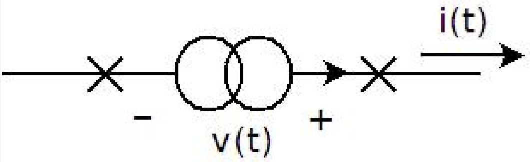
Elementos de un circuito

Fuente independiente de tensión: $v(t)$ dado, $i(t)$ cualquiera



Elementos de un circuito

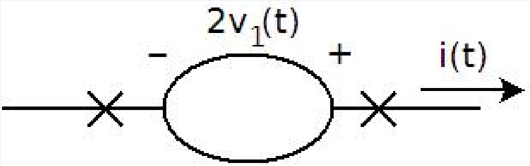
Fuente independiente de corriente: $i(t)$ dado, $v(t)$ cualquiera



Elementos de un circuito

Fuente dependiente de tensión

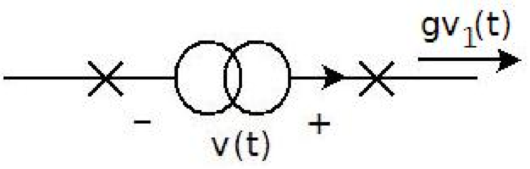
La tensión $v(t)$ es función de otra magnitud del circuito. La corriente $i(t)$ es cualquiera.



Elementos de un circuito

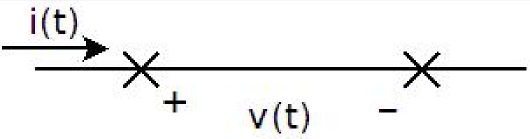
Fuente dependiente de corriente

La corriente $i(t)$ es función de otra magnitud del circuito. La tensión $v(t)$ es cualquiera.

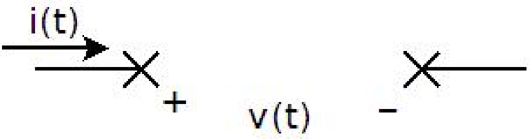


Elementos de un circuito

Cortocircuito: $v(t) = 0$, $i(t)$ cualquiera



Circuito abierto: $i(t) = 0$, $v(t)$ cualquiera

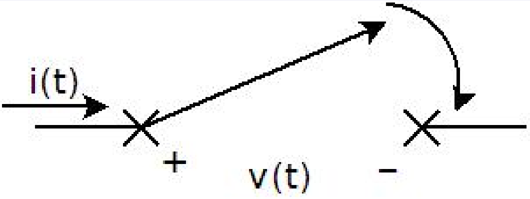


Elementos de un circuito

Llave

Tiene dos posiciones: cerrada (ON) ; abierta (OFF)

$$ON \;\; cortocircuito \quad , \quad OFF \;\; circuito\, abierto$$



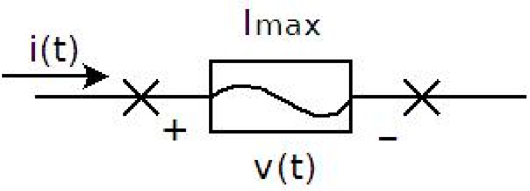
No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.

Elementos de un circuito

Fusible

Tiene dos estados, sano y cortado. Una vez que se corta, cuando el módulo de la corriente alcanza un valor de corte I_{max}, no cambia más su estado.

$$Sano: \;\; cortocircuito \;\;\; , \;\;\; Cortado: \;\; circuito\, abierto$$



No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.

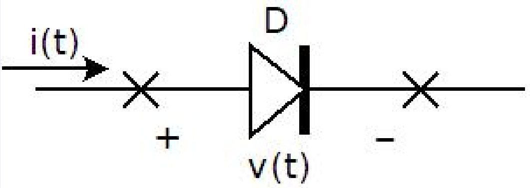
Elementos de un circuito

Diodo ideal

Tiene dos estados, ON (cortocircuito) y OFF (circuito abierto), compatible con la siguiente tabla:

Estado	$v(t)$	$i(t)$
ON	0	> 0
OFF	< 0	0

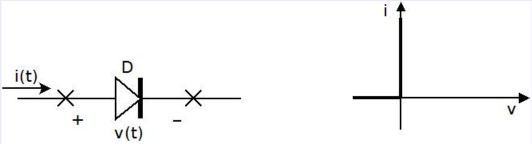
Su estado depende del resto del circuito.

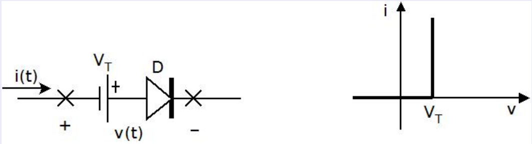


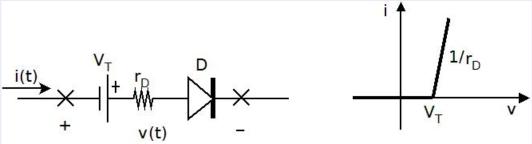
No es un elemento lineal, pero sí lo es en cada uno de sus modos de funcionamiento.

Elementos de un circuito

Diodo: de lo real a lo ideal



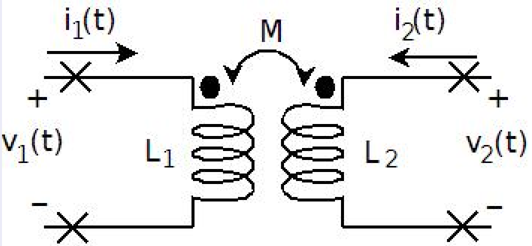




Elementos de un circuito

Transformador

Es un elemento conformado por dos bobinas y un núcleo. Consta de cuatro terminales, agrupados de a dos (primario y secundario).



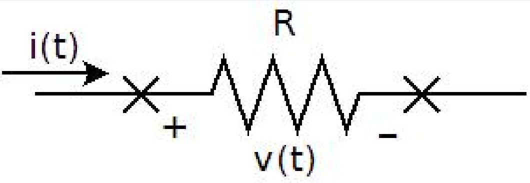
Con las polaridades y sentidos de la figura, se rige por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} v_1(t) &= L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) &= L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases}$$

Potencia de una componente

Consideremos una resistencia como componente de ejemplo.

$v(t) = Ri(t)$ (Ley de Ohm)



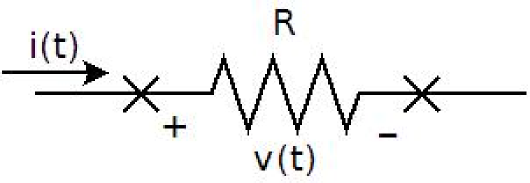
Definimos la potencia instantánea de la componente como

$$p(t) = v(t).i(t),$$

expresión que puede combinarse con la ley $v(t) - i(t)$ de la componente.

Potencia de una componente

$v(t) = Ri(t)$ (Ley de Ohm)



$$p(t) = v(t).i(t) = \frac{v^2(t)}{R} = R.i^2(t),$$

Para el caso de una fuente, usualmente se considera la corriente en el otro sentido.

Leyes de Kirchhoff

Ley de mallas

La suma de las caídas de tensión a lo largo de una malla es nula.

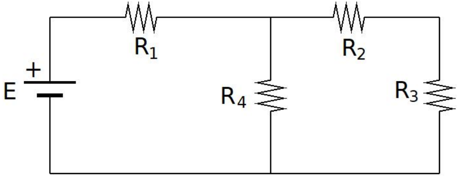
- Primero se define un sentido de recorrido de la malla.
- Primero se define la forma de medir las tensiones de los elementos de la malla.
- Finalmente, se suman las caídas en el sentido de recorrido de la malla.

Ley de nudos

La suma de las corrientes que inciden en un nudo es nula.

- Luego se define la forma de medir las corrientes que inciden en un nudo (entrantes y salientes).
- Finalmente, se suman -con signo- las corrientes que llegan al nudo (las que salen se restan).

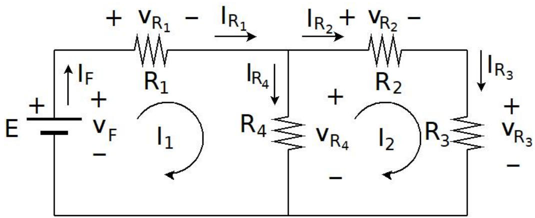
Ley de mallas



Malla

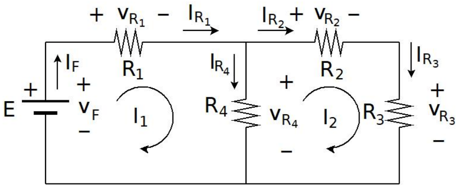
- Camino simple y cerrado dentro de un circuito.
- Un elemento puede pertenecer a más de una malla.
- A cada malla podemos asignarle un sentido de recorrido (horario o antihorario).
- Siempre *sobra* una malla.

Ley de mallas



- Para cada componente, definimos cómo vamos a medir su tensión en bornes.
- Junto con el sentido elegido para la corriente de malla, tenemos la descripción de cada elemento.
- Recorremos cada malla y vamos sumando las caídas de tensión que encontramos.
- Una caída es positiva en la suma si está medida en el sentido de recorrido de la malla.

Ley de mallas



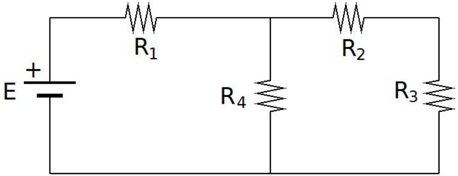
Ejemplo

- Malla de corriente I_1: $-v_F + v_{R_1} + v_{R_4} = 0$.
- Malla de corriente I_2: $-v_{R_4} + v_{R_2} + v_{R_3} = 0$.
- Observación: si sumamos ambas ecuaciones, nos queda

$$-v_F + v_{R_1} + v_{R_2} + v_{R_3} = 0$$

que es la malla exterior y no aporta una ecuación independiente.

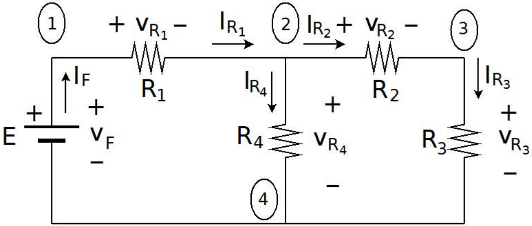
Ley de nudos



Nudo (ó *nodo*)

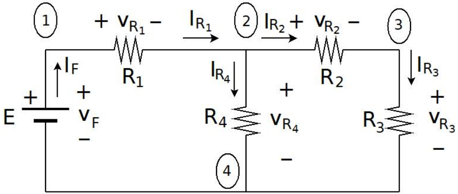
- Punto de contacto entre dos elementos del circuito.
- En un nudo pueden encontrarse varios elementos.
- En un nudo, las corrientes de las ramas incidentes *entran* o *salen*.
- Siempre *sobra* un nudo.

Ley de nudos



- Para cada componente, definimos cómo vamos a medir su corriente.
- En cada nudo, sumamos las corrientes definidas para cada rama incidente.
- Una corriente es positiva en la suma si es incidente (entra) en el nudo.

Ley de nudos



Ejemplo

- Nudo 1: $I_F - I_{R_1} = 0$.
- Nudo 2: $I_{R_1} - I_{R_2} - I_{R_4} = 0$.
- Nudo 3: $I_{R_2} - I_{R_3} = 0$.
- Observación: si sumamos las ecuaciones nos queda, a menos del signo, la ecuación del nudo 4:

$$I_F - I_{R_4} - I_{R_3} = 0$$

Métodos de resolución de circuitos

Resolver el circuito

- Hallar tensiones y corrientes para cada elemento del circuito.
- En general trabajamos de forma *paramétrica* en algunos elementos, para entender qué pasa si decidimos cambiar algo, o si algún elemento modifica su valor, etc.

Entradas y salidas

- **Entradas**: tensiones y/o corrientes que podemos manejar a voluntad. Ejemplo: fuente independiente de tensión o corriente, carga inicial en un condensador, etc.
- **Salidas**: tensiones y/o corrientes de interés, o que podemos medir, a partir de las cuales pretenderemos entender qué hace el circuito. Ejemplo: tensión y/o corriente en una determinada componente.

Métodos de resolución de circuitos

Idea general

Combinar adecuadamente las leyes de Kirchhoff con las leyes tensión-corriente de los elementos para poder llegar a un conjunto de ecuaciones que nos den las salidas en función de las entradas.

Método de los nudos

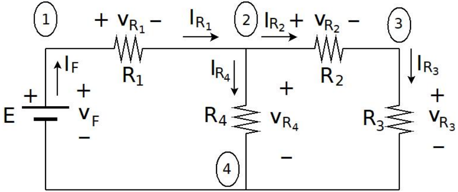
- Incógnitas: tensiones de los nodos, referidas a un *nodo base*.
- Ecuaciones: leyes de nudos, escritas en función de las tensiones nodales.

Método de las mallas

- Incógnitas: corrientes de mallas.
- Ecuaciones: leyes de mallas, escritas en función de las corrientes de malla.

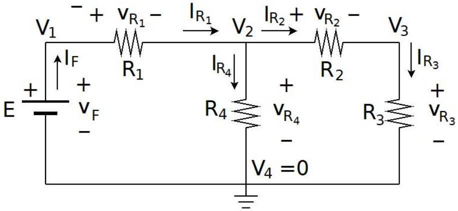
Tensiones nodales

- Elegimos un nodo como referencia.
- Introducimos las diferencias de tensión entre los demás nodos y el de referencia.
- Escribimos las ecuaciones de nudos en función de las tensiones nodales.



Método de los nudos

- Incógnitas: tensiones de los nodos, referidas a un *nodo base*.
- Ecuaciones: leyes de nudos, escritas en función de las tensiones nodales.



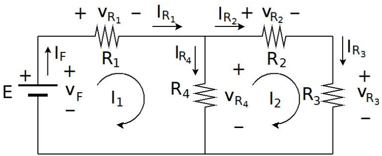
Método de los nudos

$$\left.\begin{array}{lcl} I_F - I_{R_1} & = & 0 \\ I_{R_1} - I_{R_2} - I_{R_4} & = & 0 \\ I_{R_2} - I_{R_3} & = & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} I_F - \frac{V_1 - V_2}{R_1} & = & 0 \\ \frac{V_1 - V_2}{R_1} - \frac{V_2 - V_3}{R_2} - \frac{V_2}{R_4} & = & 0 \\ \frac{V_2 - V_3}{R_2} - \frac{V_3}{R_3} & = & 0 \end{array}\right.$$

- La incógnita I_F va a depender de lo que hace el resto del circuito, dado que es la variable libre de la fuente.
- Como contraparte: $V_1 = E$!!!
- De la segunda y tercer ecuación obtenemos V_2 y V_3 y luego todas las demás incógnitas.

Método de las mallas

- Elegimos un sentido de circulación para cada malla.
- Escribimos las ecuaciones de mallas en función de las corrientes de malla.



$$-v_F + R_1.I_1 + R_4.(I_1 - I_2) = 0,\ R_4.(I_2 - I_1) + R_2.I_2 + R_3.I_2 = 0.$$

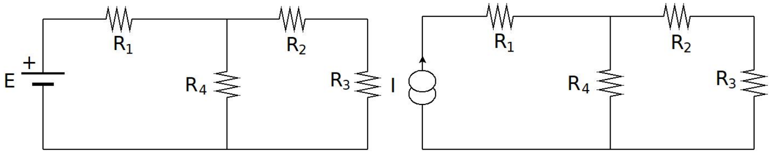
$$\begin{cases} (R_1 + R_4).I_1 - R_4.I_2 = v_F \\ -R_4.I_1 + (R_2 + R_3 + R_4).I_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} R_1 + R_4 & -R_4 \\ -R_4 & R_2 + R_3 + R_4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_F \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolvemos, usando que $v_F = E$

- Despejamos las corrientes de malla.
- De ahí obtenemos las incógnitas de interés.

¿Cuál usamos?

- Identificamos los nudos, las mallas y las fuentes independientes de tensión y corriente.
- Cada fuente de tensión fija una tensión nodal.
- Cada fuente de corriente fija una corriente de malla
- Usamos el método que tenga menos incógnitas.

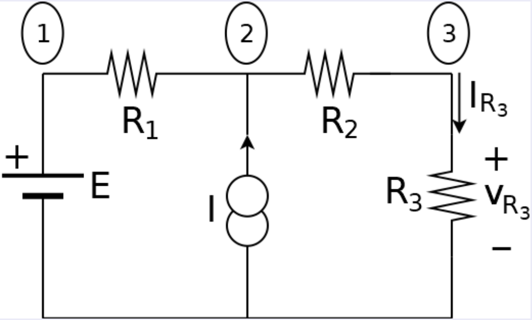


Principio de superposición

- Con frecuencia nos vamos a encontrar con circuitos que tienen varias fuentes independientes.
- Siempre podemos analizarlos aplicando mallas o nudos, obteniendo el efecto total de las fuentes sobre las magnitudes de interés.
- Si el circuito es lineal, es decir, si todos los elementos tienen una relación tensión-corriente lineal, podemos simplificar el análisis.
- La linealidad, en este contexto, podría resumirse así: *el efecto total de las fuentes independientes es la suma del efecto que cada fuente tendría sobre la magnitud de interés si fuera la única fuente independiente del circuito.*

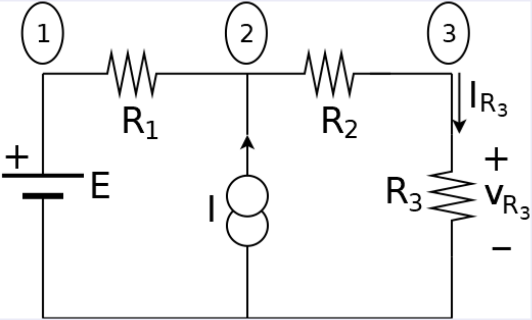
Principio de superposición

Ejemplo 1



- Objetivo: hallar v_{R_3} e I_{R_3}.
- Aplicamos nudos, tomando como referencia el nudo de abajo.
- Las tensiones en los nodos 1 y 3 valen E y la tensión de interés v_{R_3}.
- Sea V_2 la tensión del nodo 2.
- Planteamos las ecuaciones.

Ejemplo 1



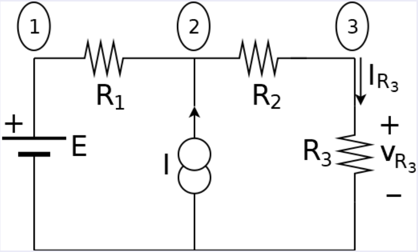
$$\frac{E - V_2}{R_1} + I = \frac{V_2 - V_{R_3}}{R_2} \quad , \quad \frac{V_2 - V_{R_3}}{R_2} = \frac{V_{R_3}}{R_3}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$V_2 = V_{R_3}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right)$$

Principio de superposición

Ejemplo 1



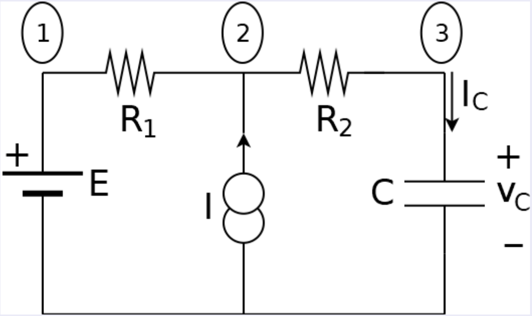
Despejando, obtenemos

$$\boxed{V_{R_3} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.E + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}.I}$$

$$\boxed{I_{R_3} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3}.E + \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_3}.I}$$

Principio de superposición

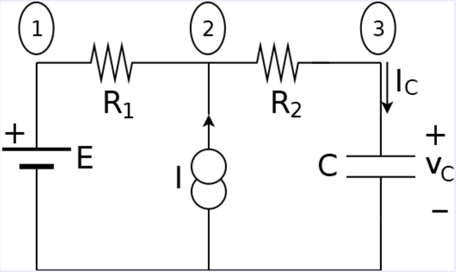
Ejemplo 2



- Objetivo: hallar v_c e I_c.
- Aplicamos nudos, tomando como referencia el nudo de abajo.
- Las tensiones en los nodos 1 y 3 valen E y la tensión de interés v_c.
- Sea V_2 la tensión del nodo 2.
- Planteamos las ecuaciones.

Principio de superposición

Ejemplo 2



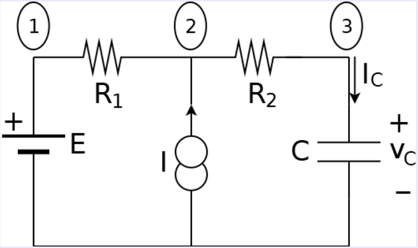
$$\frac{E - V_2}{R_1} + I = \frac{V_2 - v_C}{R_2} \quad , \quad \frac{V_2 - v_C}{R_2} = I_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$V_2 = v_C + R_2 C\frac{dv_C}{dt}$$

Principio de superposición

Ejemplo 2



$$\frac{E}{R_1} + I = V_2\left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right] - \frac{v_C}{R_2} \quad , \quad V_2 = v_C + R_2 C\frac{dv_C}{dt}$$

Despejando, obtenemos la ecuación diferencial

$$\boxed{(R_1 + R_2)C.\frac{dv_C}{dt}(t) + v_C(t) = E + R_1 I}$$

Principio de superposición

Ejemplo 2

$$\boxed{(R_1 + R_2)C.\frac{dv_C}{dt}(t) + v_C(t) = E + R_1 I}$$

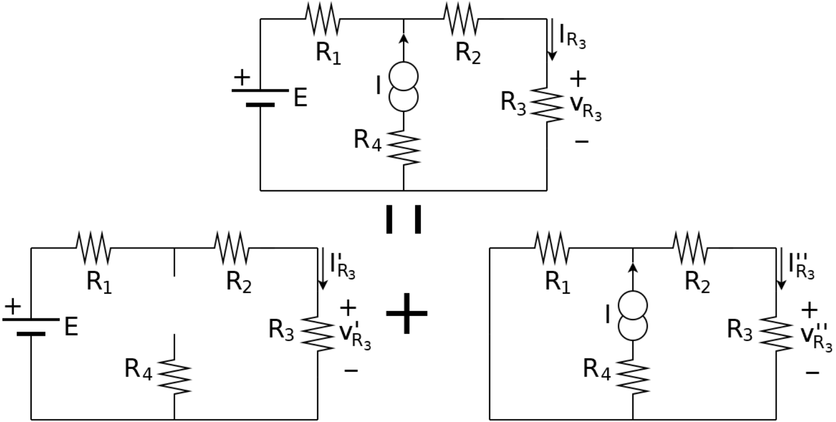
$$(R_1 + R_2)C.\frac{dv_C^E}{dt}(t) + v_C^E(t) = E \quad \Big\| \quad (R_1 + R_2)C.\frac{dv_C^I}{dt}(t) + v_C^I(t) = R_1 I$$

$$\Rightarrow \boxed{v_C(t) = v_C^E(t) + v_C^I(t)}$$

Principio de superposición

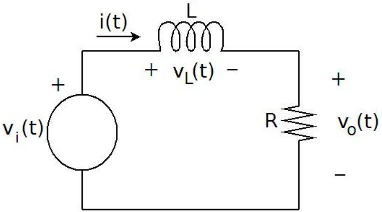
- Por linealidad, el efecto de tener varias fuentes en un circuito es la suma del efecto que haría cada fuente por sí sola.
- Anulamos las fuentes y las vamos prendiendo de a una.
- Anular una fuente independiente equivale a sustituirla por una del mismo tipo y de valor cero.
  - Anular una fuente de tensión equivale a cortocircuitarla.
  - Anular una fuente de corriente equivale a abrirla.
- También podemos anularlas por grupos (por ejemplo: sólo las de corriente o sólo las de tensión).

Principio de superposición



$$v_{R_3} = v'_{R_3} + v''_{R_3} \quad , \quad I_{R_3} = I'_{R_3} + I''_{R_3}$$

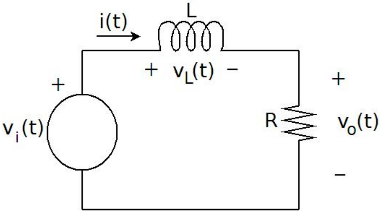
Análisis de un circuito $R - L$ (OPCIONAL)



Objetivos:

- Asumiendo conocida la tensión de la fuente (entrada), determinar las tensiones y corrientes del resto de los elementos del circuito, en particular la que consideraremos al *salida del circuito* ($v_o(t)$), a partir del instante en que se enciende la fuente.
- Analizar la situación particular de entrada constante.
- Analizar la situación particular de entrada sinusoidal, discutiendo en función de la frecuencia de la entrada.

Ecuaciones generales



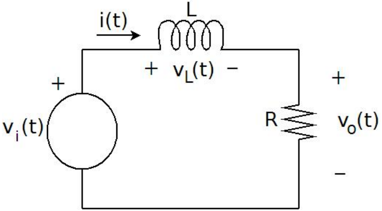
Ley de Kirchhoff de mallas

$$v_i(t) = v_L(t) + v_o(t)$$

Leyes de los elementos

$$v_L(t) = L\frac{d}{dt}i(t) \quad , \quad v_o(t) = Ri(t)$$

Ecuaciones generales

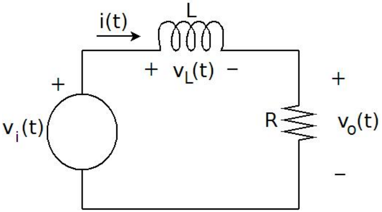


Ecuación de la corriente

$$v_i(t) = L\frac{d}{dt}i(t) + Ri(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{1}{L}v_i(t)$$

- Es una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- La condición inicial es la corriente i_{L_0} por la bobina cuando se inicia el circuito.

Resolvemos la ecuación diferencial

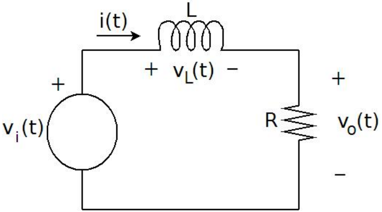


Solución homogénea: $i_H(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$, $\tau = \frac{L}{R}$

Comentarios:

- La solución homogénea converge asintóticamente a 0.
- Decimos que es transitoria, ya que se extingue al transcurrir el tiempo.
- El parámetro τ - *constante de tiempo del circuito*- da una idea de durante cuánto tiempo es apreciable la solución transitoria.
- Para poder avanzar, tenemos que trabajar con una entrada conocida.

Entrada constante $v_i(t) = E$, $t \geq 0$



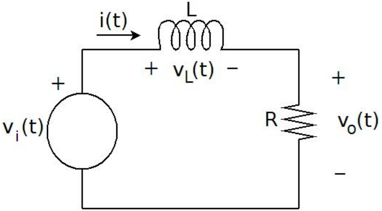
Ecuación de la corriente

$$\frac{d}{dt}i(t) + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$$

Solución particular (constante)

$$i_P(t) = \frac{E}{R}$$

Entrada constante $v_i(t) = E$, $t \geq 0$



Solución completa

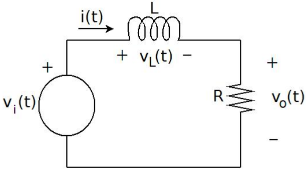
$$i(t) = i_P(t) + i_H(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

donde A se ajusta a partir de la condición inicial: $A = i_{L_0} - \frac{E}{R}$.

La salida

$$v_o(t) = Ri(t) = E + R\left(i_{L_0} - \frac{E}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$$

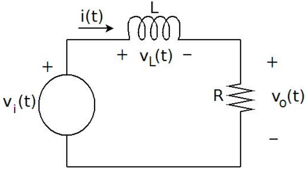
Entrada constante $v_i(t) = E,\ t \geq 0$



Comentarios

- La solución converge a un valor constante; corresponde a la extinción de la parte transitoria.
- Para un tiempo del orden de dos o tres τ, ya podemos despreciar la parte transitoria ($e^{-2} \approx 0,135$).
- Decimos que alcanzamos un régimen de continua.

Entrada constante $v_i(t) = E$, $t \geq 0$



Comentarios

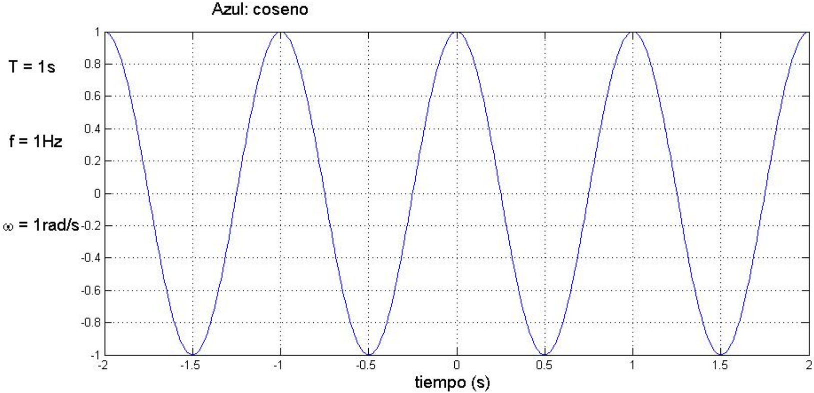
- El valor de régimen de la corriente es $\frac{E}{R}$, que puede obtenerse observando que, con excitación constante, la bobina actúa como un *cortocircuito*.
- Una situación similar se da con un condensador que, con excitación constante, se comporta como un *circuito abierto*.

Función sinusoidal

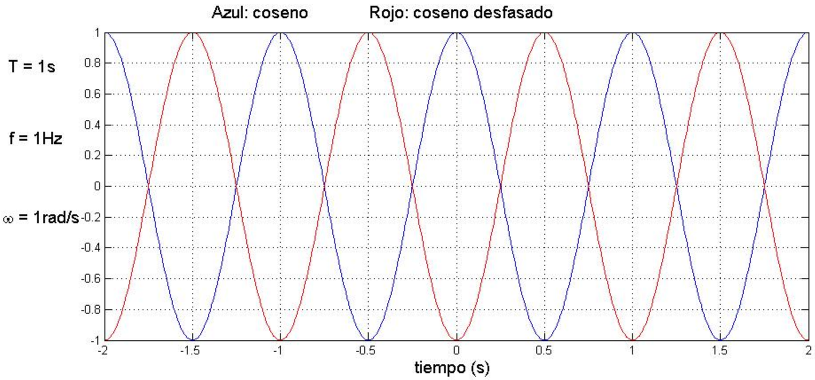
$A\cos(\omega t + \varphi)$

- A es la amplitud de la señal;
- $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$, siendo
  - T - periodo de la señal,
  - $f = 1/T$ - frecuencia de la señal,
  - ω - pulsación o frecuencia angular de la señal.
- φ es la fase de la señal.

Ejemplos

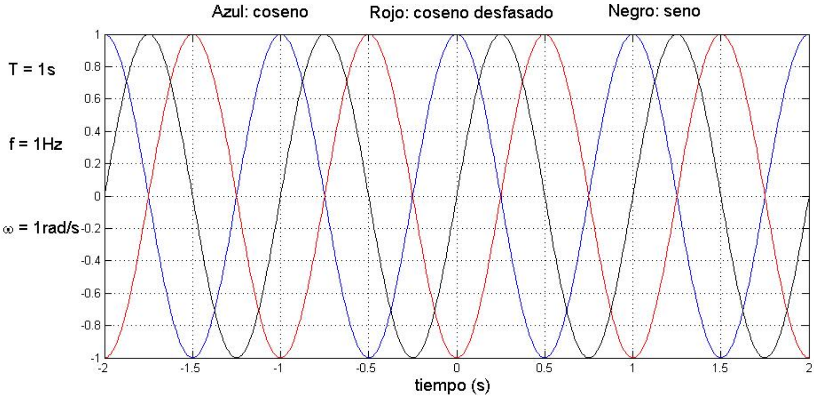

Azul: coseno
T = 1s
f = 1Hz
ω = 1rad/s
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
tiempo (s)

Ejemplos

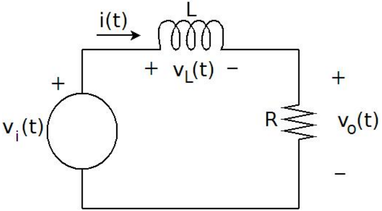


Azul: coseno
Rojo: coseno desfasado
T = 1s
f = 1Hz
ω = 1rad/s
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
tiempo (s)

Ejemplos


Azul: coseno
Rojo: coseno desfasado
Negro: seno
T = 1s
f = 1Hz
ω = 1rad/s
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
tiempo (s)

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$



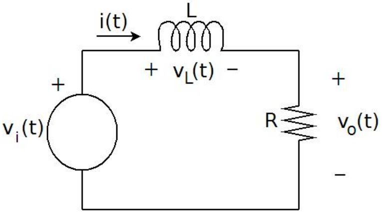
Solución particular (sinusoidal)

$$i_P(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$I = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \quad , \quad \varphi_i = \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

(derivando y sustituyendo en la ecuación de la corriente; ver Notas del curso).

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$



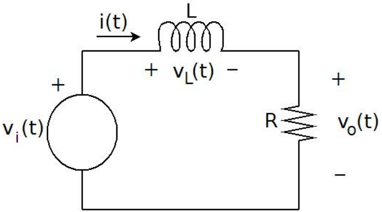
Solución completa

$$i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right] + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

Salida

$$v_o(t) = \frac{RE}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} \cos\left[\omega t + \varphi_v - atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right] + RAe^{-\frac{t}{\tau}}$$

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$



Comentarios

- Nuevamente tenemos un estado de régimen.
- Al pasar el tiempo, la solución tiende a ser sinusoidal, con la misma frecuencia que la entrada (régimen sinusoidal).
- La relación de amplitud entre la entrada y la respuesta en régimen y la respectiva relación entre las fases dependen de la frecuencia de trabajo.

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$

Comentarios

- La relación de amplitud entre la entrada y la respuesta en régimen se denomina ganancia del sistema y depende de la frecuencia de trabajo.

$$\text{relación de amplitud} : \quad \frac{R}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

- Para frecuencias bajas ($\omega \to 0$) la relación de amplitudes es casi 1, por lo que la respuesta tendrá aproximadamente la misma amplitud que la entrada.
- Para frecuencias altas ($\omega \to \infty$) la relación de amplitudes es casi 0, por lo que la salida será aproximadamente nula!!
- Un circuito con este comportamiento se dice que es un filtro pasabajos, ya que no altera la amplitud de las señales de frecuencia baja y prácticamente elimina las altas frecuencias.

Entrada sinusoidal: $v_i(t) = E\cos(\omega t + \varphi_v)$

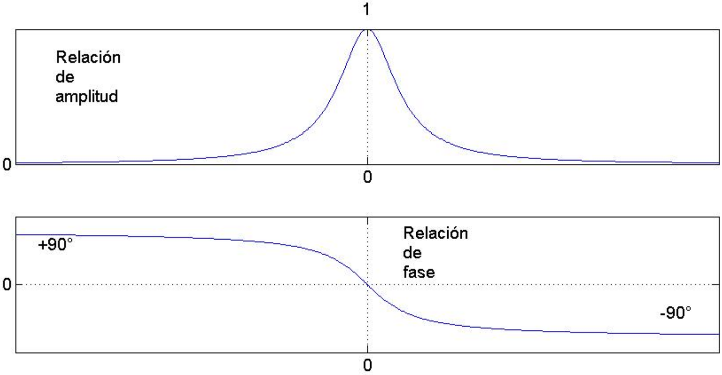
Comentarios

- La relación de fase entre la entrada y la respuesta en régimen depende de la frecuencia de trabajo.

$$\text{relación de fase :} \quad -atan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

- Para frecuencias bajas ($\omega \to 0$) el desfasaje es casi 0, por lo que la respuesta tendrá aproximadamente la misma fase que la entrada.
- Para frecuencias altas ($\omega \to \infty$) la relación de amplitudes es casi -90^o, por lo que si la entrada es un coseno, la salida será prácticamente un seno.

Representación gráfica



A lo largo del curso aprenderemos:

- que los resultados que vimos del filtro pasabajos son generales a muchos sistemas lineales descritos por ecuaciones diferenciales lineales, en la medida que la respuesta homogénea sea transitoria.
- herramientas para sistematizar el análisis que hicimos recién, de forma de poder abordar cualquier sistema lineal.
- que el análisis de la respuesta en frecuencia de un circuito nos servirá para conocer en detalle su respuesta frente a una entrada dada.
- varias cosas más, que desarrollaremos en el semestre.