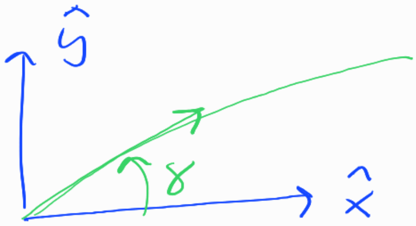
Óptica, Examen, 24 febrero de 2022

Ej 7) a) $$\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n$$



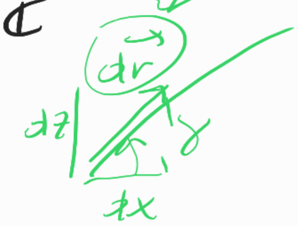
proyectamos la ec. según $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

$\hat{x}$) $$\underbrace{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\cdot\hat{x}}_{} = \nabla n\cdot\hat{x} = \frac{\partial n}{\partial x} = 0$$

$$= \frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\hat{x}\right) = \frac{d}{ds}\left(n\frac{dx}{ds}\right) = 0 \;\; ! \;\; n\underbrace{\frac{dx}{ds}}_{\cos\gamma} = \mathbb{C}$$

($\hat{x}$ fijo)

$|d\vec{r}| = ds$



$$n\frac{dx}{ds} = \mathbb{C} \longleftrightarrow ds = \frac{n}{C}dx$$

$\hat{y}$) $$\underbrace{\frac{d}{ds}\left(n\frac{d\vec{r}}{ds}\right)\cdot\hat{y}}_{} = \nabla n\cdot\hat{y} = \frac{\partial n}{\partial y}$$

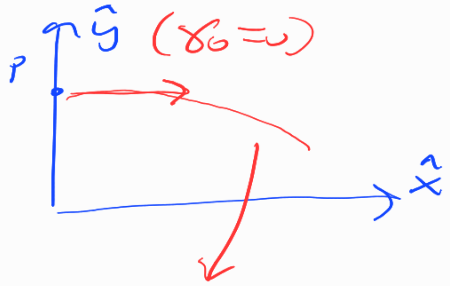
$$\underbrace{\frac{d}{ds}\left(n\frac{dy}{ds}\right)}_{} = \frac{\partial n}{\partial y}$$

$$\frac{\mathbb{C}}{n}\frac{d}{dx}\left(\cancel{n}\frac{\mathbb{C}}{\cancel{n}}\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\partial n}{\partial y} \quad :$$

$$\frac{\mathbb{C}^2}{n}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial n}{\partial y} \quad : \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\mathbb{C}^2}\underbrace{n\frac{\partial n}{\partial y}}_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(n^2)}$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2\mathbb{C}^2}\frac{\partial n^2}{\partial y}}$$

b) $n(y) = 1 + \Delta e^{-y/h}$



el rayo se curva hacia donde apunta ∇n, por lo que no va a superar la altura inicial

$y \leq y_0 \ll h$: $y/h \ll 1$

$y/h \ll 1$:

$e^{-y/h} \simeq 1 - y/h$:

$n(y) \simeq 1 + \Delta(1 - y/h)$

$= 1 + \Delta - \Delta y/h \Rightarrow$

$n^2(y) \simeq (1+\Delta)^2 + (\Delta y/h)^2 - 2(1+\Delta)\Delta y/h$;

$\frac{\partial n^2}{\partial y} \simeq 2(\Delta/h)^2 y - 2(1+\Delta)\frac{\Delta}{h}$;

$C = n(y_0)\underbrace{\cos\gamma_0}_{1} \cong 1 + \Delta(1 - y_0/h) = (1+\Delta) - \Delta y_0/h$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2C^2}\frac{\partial n^2}{\partial y} \simeq \frac{1}{\cancel{2}[\underbrace{(1+\Delta) - \Delta \frac{y_0}{h}}_{\simeq 1}]^2}\left[\cancel{2}(\Delta/h)^2 y - \cancel{2}\underbrace{(1+\Delta)}_{\sim 1}\frac{\Delta}{h}\right]$$

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{\Delta}{h}\right)^2 y \simeq -\frac{\Delta}{h}}$$

con: $\begin{cases} y(0) = y_0 \\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_0 = \operatorname{tg}\gamma_0 = 0 \end{cases}$

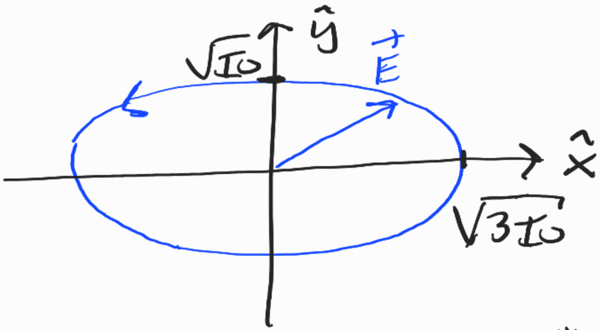
$y = y_h + y_p$; $y_h = A\,\mathrm{ch}\left(\frac{\Delta}{h}x\right) + B\,\mathrm{sh}\left(\frac{\Delta}{h}x\right)$

$y_p = h/\Delta$

Hallando A y B a partir de $y(0)$, $\frac{dy}{dx}(0)$:

$$\boxed{y(x) = (y_0 - h/\Delta)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\Delta}{h}x\right) + \frac{h}{\Delta}}$$

Ej 2) $\vec{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$



- Los valores extremos de $|\vec{E}|$ (y por lo tanto $I \propto EE^*$) corresponden a $\vec{E}$ apuntando según los semiejes de la elipse → $\hat{x}$ e $\hat{y}$ son los semi-ejes (mayor y menor)

De acuerdo a los valores de intensidad : $|E_x| = \sqrt{3I_0}$

$|E_y| = \sqrt{I_0}$

y como los semi-ejes coinciden con los cartesianos: $\varphi_y - \varphi_x = \pi/2$

(polarización izq., la componente y adelanta a la x)

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \begin{pmatrix} \sqrt{3I_0} \\ \sqrt{I_0}\, e^{j\pi/2} \end{pmatrix}}$$ (sin normalizar)

b) Eje de transmisión del polarizador formando un ángulo θ con $\hat{x}$:

$$\hat{t} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \text{sen}\,\theta \end{pmatrix} \; ; \quad I = |\hat{t}\cdot\vec{E}|^2 = \boxed{I_0(3\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta)}$$

(similarmente: $J_P(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$: matriz de Jones de un polarizador de eje horizontal ;

si consideramos la rotación de la base en un ángulo θ :

$J_P(\theta) = R^T(\theta) J_P(0) R(\theta)$, $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\,\theta \\ -\text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$:

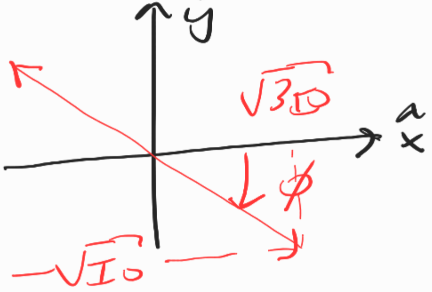
$J_P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \text{sen}\,\theta\cos\theta \\ \text{sen}\,\theta\cos\theta & \text{sen}^2\theta \end{pmatrix}$; luego $I = |J_P(\theta)\vec{E}|^2 =$

$$= I_0\Big(\underbrace{3\cos^4\theta}_{3\cos^2\theta\cos^2\theta} + \text{sen}^2\theta\cos^2\theta + \underbrace{3\,\text{sen}^2\theta\cos^2\theta} + \text{sen}^4\theta\Big)$$

$$= I_0\Big(3\cos^2\theta(\overbrace{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}^{1}) + \text{sen}^2\theta(\overbrace{\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta}^{1})\Big) \checkmark$$

b) $J_{\lambda/4} = \begin{pmatrix} e^{-j\pi/4} & 0 \\ 0 & e^{j\pi/4} \end{pmatrix} = e^{-j\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$

$J_{\lambda/4} \vec{E} = e^{-j\pi/4} \begin{pmatrix} \sqrt{3I_0} \\ -\sqrt{I_0} \end{pmatrix}$: corresponde a polarización lineal

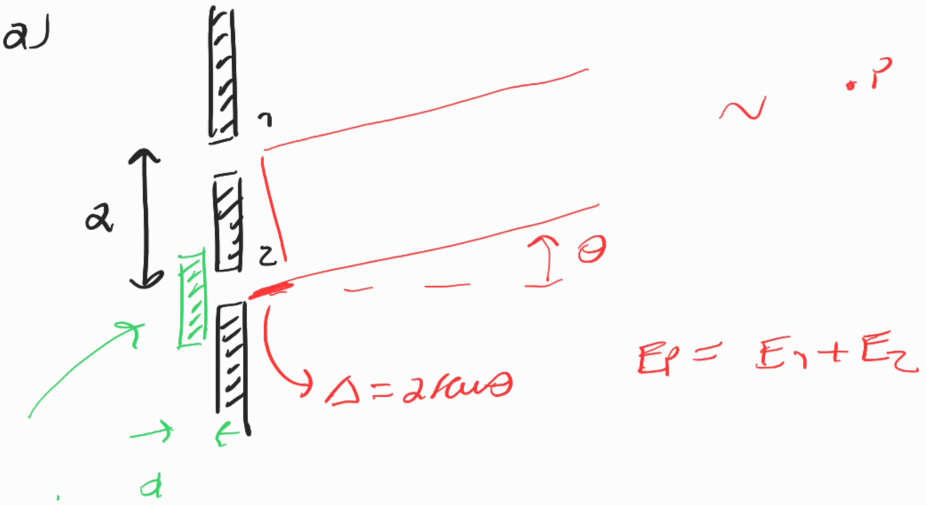


$\operatorname{tg} \phi = -1/\sqrt{3}$;

ángulo de polarización: $\boxed{\phi = -\pi/6}$

$\Rightarrow$ La intensidad máxima se obtendrá con un polarizador cuyo eje de transmisión forme un ángulo ϕ con $\hat{x}$; el valor de la intensidad será: $|J_{\lambda/4} \vec{E}|^2 = \boxed{4 I_0}$

Ej 3) a)



introduce una diferencia de caminos ópticos: $(n-1)d$ con respecto a la rendija 1

$$E_P = \frac{A_0^{(1)}}{r_1} e^{j(\omega t - K r_1)} + \frac{A_0^{(2)}}{r_2} e^{j[\omega t - K r_2 - K(n-1)d]}$$

$(K = 2\pi/\lambda)$

$$\simeq \frac{A_0^{(1)}}{r_1} e^{j(\omega t - K r_1)} \underbrace{\left\{ 1 + e^{-jK[\underbrace{(r_2 - r_1)}_{\Delta = a\sin\theta} + (n-1)d]} \right\}}_{e^{-jK/2(\Delta + (n-1)d)} \underbrace{\left[e^{+j\frac{K}{2}(\Delta + (n-1)d)} + e^{-j\frac{K}{2}(\Delta + (n-1)d)} \right]}_{2\cos\left(\frac{K}{2}(\Delta + (n-1)d)\right)}} :$$

$$\Rightarrow I_P \propto E_P E_P^{*} = \boxed{4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda} \left(a\sin\theta + (n-1)d \right) \right)}$$

b) Tenemos ahora 2N rendijas alternadas!

$$E_P = E_1 + E_2 + \cdots + E_{2N} =$$

$$= \frac{A_0^{(1)}}{r_1} e^{j(\omega t - K r_1)} + \frac{A_0^{(2)}}{r_2} e^{j(\omega t - K r_2 - K(n-1)d)}$$

$$+ \frac{A_0^{(3)}}{r_3} e^{j(\omega t - K r_3)} + \cdots + \frac{A_0^{(2N)}}{r_{2N}} e^{j(\omega t - K r_{2N} - K(n-1)d)}$$

$$\cong \frac{A_0^{(1)}}{r_1} e^{j(\omega t - K r_1)} \Big[1 + e^{-jK(\Delta + (n-1)d)} + e^{-jK2\Delta}$$

$$+ e^{-jK(3\Delta + (n-1)d)} + \cdots + e^{-j((2N-1)\Delta + (n-1)d)} \Big] =$$

$$= 1 + e^{-jK2\Delta} + \cdots e^{-jK(2N-2)\Delta} + e^{-jK(\Delta + (n-1)d)} \cdot$$

$$\cdot \left[1 + e^{-jK2\Delta} + \cdots e^{-jK(2N-2)\Delta} \right]$$

$$= \underbrace{\left(1 + e^{-jK(\Delta + (n-1)d)}\right)}_{\text{parte a)}} \underbrace{\left[1 + e^{-jK2\Delta} + \cdots + e^{-jK(2N-2)\Delta} \right]}_{\sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{-jK2\Delta}\right)^n}$$

$$\frac{1 - e^{-jK2N\Delta}}{1 - e^{-jK2\Delta}}$$

$$e^{-jK(N-1)\Delta} \sin(NK\Delta) / \sin(K\Delta)$$

$$\Rightarrow I_T = 4 I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}(a \sin\theta + (n-1) d)\right) \frac{\sin^2\left(N \frac{\pi}{\lambda} 2a \sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} 2a \sin\theta\right)}$$

c)

patrón de interferencia de
2 rendijas separadas a entre
sí, una cubierta por la
lámina

patrón de interferencia
de N rendijas
separadas 2a
entre sí