Práctico 2

Teoría de Lenguajes

Los objetivos de este práctico son que el/la estudiante

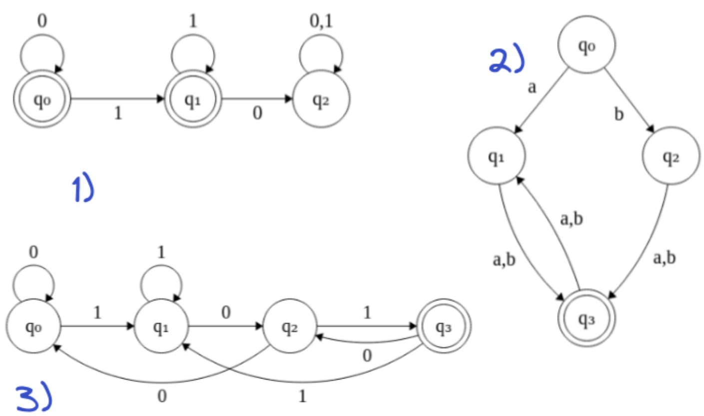
- pueda construir **autómatas finitos** (AF), tanto **deterministas** como **no deterministas**, para reconocer lenguajes;
- realice demostraciones formales sobre AFs.

Ejercicios fundamentales

Ejercicio 1

Parte A

Intente describir en lenguaje natural cada uno de los lenguajes aceptados por los autómatas finitos presentados a continuación:



Parte B

Mediante la intuición intente dar una expresión regular que genere al lenguaje aceptado por el autómata *2)*. Más adelante en el curso veremos métodos **formales** para realizar esta conversión.

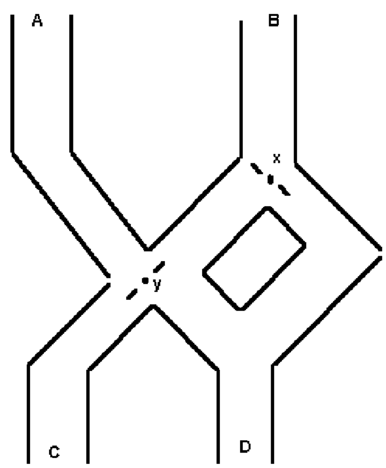
Ejercicio 2

Cree y diagrame **autómatas finitos** que reconozcan los siguientes lenguajes sobre el alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$:

1. El conjunto de las tiras que no tienen dos 1 consecutivos.
2. El conjunto de las tiras que contienen al menos una vez la secuencia 010.
3. El conjunto de las tiras que contienen a lo sumo dos 0 consecutivos. Esto puede pasar más de una vez, pero nunca superando la cantidad de dos consecutivos.
4. El conjunto de las tiras donde todo par de 0 adyacentes aparece antes de un par de 1 adyacentes.
5. $L_5 = \{x : x = 0^k 1^m \wedge (k+m) \mod 2 = 0\}$
6. El conjunto de tiras en $(0|1)^*$ tal que algún par de ceros estén separados por una tira de largo $4i$, para algún $i \geq 0$.
7. $L_7 = \{x : x = uvw \wedge x \in \{0,1\}^* \wedge v \in L(1^*01^*001^*0001^*)\}$

Ejercicio 3

Considere el siguiente juego de un local de *maquinitas*:



Una ficha es ingresada por **A** o por **B**. Las llavecitas x e y hacen que la ficha sea enviada a la derecha o a la izquierda según la posición en que se encuentran. Cuando una ficha pasa por una llave ocasiona que esta cambie de posición, por lo que la próxima ficha que la encuentre será enviada en dirección opuesta.

Por ejemplo, si la máquina está como muestra la imagen, una ficha ingresada por **A** va a caer por **C** y generar que la llavecita y se mueva. Si se volviera a ingresar una ficha por **A**, ahora caería por **D** y movería nuevamente a y, lo que la dejaría otra vez en la posición mostrada en la imagen.

Modele este juego como un **autómata finito** teniendo en cuenta que:

- Un 1 indica que la ficha se pone por la entrada **A**.
- Un 0 indica que la ficha se pone por la entrada **B**.
- Una secuencia de entradas es aceptada si la última ficha sale por **D**.
- La máquina siempre comienza en la configuración de la imagen.

Ejercicio 4

Utilizando los algoritmos de pasaje vistos en el teórico construya un **autómata finito determinista** equivalente para cada uno de los siguientes autómatas:

1. $M_1 = (\{p,q,r,s\}, \{0,1\}, \delta, p, \{s\})$ donde δ está dada por:

δ	**0**	**1**
p	$\{p,q\}$	$\{p\}$
q	$\{r\}$	$\{r\}$
r	$\{s\}$	$\{\}$
s	$\{s\}$	$\{s\}$

2. $M_2 = (\{p,q,r,s\}, \{0,1\}, \delta, p, \{q,s\})$ donde δ está dada por:

δ	**0**	**1**
p	$\{q,s\}$	$\{q\}$
q	$\{r\}$	$\{q,r\}$
r	$\{s\}$	$\{p\}$
s	$\{\}$	$\{p\}$

3. $M_3 = (\{q_0,q_1,q_2,q_3,q_4\}, \{a,b\}, \delta, q_0, \{q_4\})$ donde δ está dada por:

δ	**a**	**b**	ϵ
q_0	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_1,q_3\}$	$\{\}$
q_1	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$
q_2	$\{q_4\}$	$\{\}$	$\{\}$
q_3	$\{\}$	$\{q_4\}$	$\{\}$
q_4	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

4. $M_4 = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\}, \{a,b,c\}, \delta, q_0, \{q_3\})$ donde δ está dada por:

δ	**a**	**b**	**c**	ϵ
q_0	$\{q_0,q_1\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_2\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_1,q_3\}$	$\{\}$	$\{\}$
q_2	$\{\}$	$\{q_2\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$
q_3	$\{\}$	$\{\}$	$\{q_3\}$	$\{\}$

5. $M_5 = (\{q_0,q_1,q_2,q_3\}, \{a,b\}, \delta, q_0, \{q_3\})$ donde δ está dada por:

δ	**a**	**b**	ϵ
q_0	$\{q_1,q_3\}$	$\{q_0\}$	$\{q_1,q_2\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_1,q_2\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{\}$	$\{q_0,q_3\}$	$\{q_1\}$
q_3	$\{q_3\}$	$\{q_1,q_2,q_3\}$	$\{\}$

Ejercicios complementarios

Ejercicio 5

Parte A

Sean $M_a = \{Q_a, \Sigma_a, \delta_a, q_{0_a}, F_a\}$ y $M_b = \{Q_b, \Sigma_b, \delta_b, q_{0_b}, F_b\}$ dos **autómatas finitos deterministas**. Construya **autómatas finitos** M_i tales que

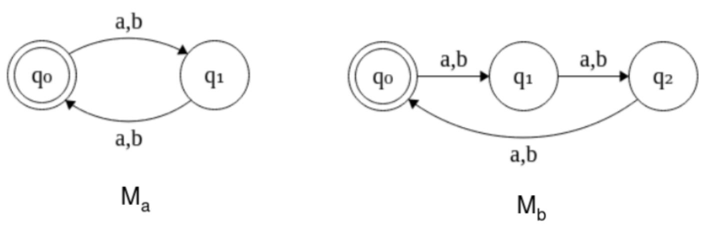
1. $M_1 : \ L(M_1) = L(M_a) \cup L(M_b)$
2. $M_2 : \ L(M_2) = L(M_a) \cap L(M_b)$
3. $M_3 : \ L(M_3) = L(M_a)^C$

Parte B

Considere los lenguajes

- L_a conformado por las tiras de largo par, con $\Sigma = \{a, b\}$;
- L_b conformado por las tiras de largo múltiplo de 3, con $\Sigma = \{a, b\}$.

y los siguientes **autómatas finitos deterministas** M_a y M_b que los reconocen



Ejemplifique sobre estos autómatas las construcciones de M_1, M_2 y M_3 de la parte anterior.

Ejercicio 6

Sea una operación de multiplicación **no asociativa** tal que:

	a	**b**	**c**
a	a	a	c
b	c	a	b
c	b	c	a

Observe que según la asociación que se haga los resultados pueden variar. Por ejemplo, para la tira abc:

- $(a.b).c = a.c = c$, asociando de izquierda a derecha;
- $a.(b.c) = a.b = a$, asociando de derecha a izquierda.

Se pide, entonces:

1. Construya un **AFD** que reconozca las tiras que, evaluadas asociando de izquierda a derecha, dan a.
2. Construya un **AFND** que reconozca las tiras que, evaluadas asociando de derecha a izquierda, dan a.
3. Construya un **AFND** que reconozca las tiras que tanto al ser evaluadas asociando de izquierda a derecha como de derecha a izquierda dan a. Un ejemplo posible es la tira abb.
4. Una vez obtenidos los autómatas anteriores explique cómo construiría un **AFD** que reconozca las tiras que den siempre el mismo resultado, ya sea evaluándolas asociando de izquierda a derecha o de derecha a izquierda.

Nota: Para las partes 3 y 4 considere utilizar los conceptos trabajados en el ejercicio 5.

Ejercicio 7

Construya un autómata finito que acepte el conjunto de todas las tiras que, **interpretadas** como la representación binaria de un entero positivo, sea congruente con $0 \mod 5$.

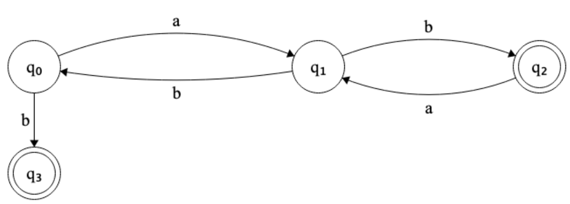
Previo a construir la máquina considere desarrollar el cálculo del valor decimal de un número binario cualquiera utilizando las siguientes propiedades de módulo:

- $(a + b) \mod c = ((a \mod c) + (b \mod c)) \mod c$
- $(a \times b) \mod c = ((a \mod c) \times (b \mod c)) \mod c$

Ejercicio 8

Parte A

Considere el autómata M_B dado por el siguiente diagrama:



Demuestre que $x \in L(M_B) \implies x$ termina en b.

Parte B

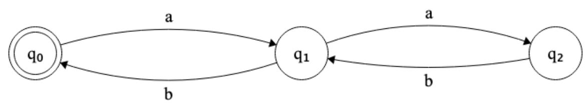
Sea $M_A = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, \delta, q_0, \{q_0\})$ donde δ cumple:

- $\delta(q_0, a) = \{q_1\}$
- $\delta(q_1, b) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta(q_2, a) = \{q_0\}$
- y el resto de transiciones no están definidas.

Demuestre que $x \in L(M_A) \implies |x|_a \mod 2 = 0$

Parte C

Considere el autómata M_C dado por el siguiente diagrama:



Demuestre que $x \in L(M_C) \implies$

- x comienza en a
- $|x|_a = |x|_b$
- p es prefijo de $x \implies |p|_a - |p|_b = n \wedge n \in \{0, 1, 2\}$