Práctico 0

Teoría de Lenguajes

Los objetivos de este práctico son que el/la estudiante:

- se familiarice con el concepto de **lenguaje formal**;
- sea consciente de las diferentes formas de expresarlos;
- realice pruebas formales utilizando operadores tales como la concatenación, unión o intersección de lenguajes.

Ejercicios fundamentales

Ejercicio 1

Se comenzará abordando los conceptos fundamentales del curso partiendo del **alfabeto** Σ. Como se vió en el teórico, los lenguajes formales son **conjuntos** de secuencias de símbolos. Por lo tanto **todo** lenguaje L definido sobre un alfabeto Σ cumple que $L \subseteq \Sigma^*$.

Si $\Sigma = \{a, b, c, d\}$:

1. ¿Qué entiende por Σ^*?
2. ¿Cuál es la tira de Σ^* de menor largo?
3. Dé una tira de Σ^* para cada largo posible hasta llegar a largo 5 inclusive.
4. Dé los reversos[1] de cada una de las tiras de la parte anterior.
5. Si $w \in \Sigma^*$ ¿Qué entiende por $|w|$? ¿Y por $|w|_c$?
6. Dé una tira $w_1 \in \Sigma^*$ donde se cumpla que $|w_1|_b > |w_1|_a$.
7. Dé otra tira $w_2 \in \Sigma^*$ donde se cumpla que $|w_2|_c > |w_2|_b > |w_2|_a > 0$ y que no tenga símbolos iguales consecutivos.
8. ¿Qué entiende por *subtira*? ¿Y por *prefijo* y *sufijo*?
9. Dé todos los prefijos para la tira w_2.
10. ¿Hay algún prefijo que compartan todas las tiras de Σ^* independientemente del largo de ellas?

[1] El reverso x^r de una tira x es otra tira que surge de *leer a x de derecha a izquierda*. Por ejemplo, si $x = aaba$ entonces $x^r = abaa$.

Ejercicio 2

Parte A

Ya que los lenguajes formales **son conjuntos**, también cuentan con los operadores de **intersección**, **unión** y **complemento**. Utilice esos operadores sobre estos lenguajes definidos sobre $\Sigma = \{a, b, c\}$:

1. Si $L_1 = \{aa, aab, bc\}$ y $L_2 = \{aa, b\} \implies L_1 \cup L_2 = ...$
2. Si $L_1 = \{aa, aab, bc\}$ y $L_2 = \{aa, \epsilon\} \implies L_1 \cup L_2 = ...$
3. Si $L_1 = \{aa, aab, bc\}$ y $L_2 = \{aa, b\} \implies L_1 \cap L_2 = ...$
4. Si $L_1 = \{aa, aab, bc\}$ y $L_2 = \{aa, \epsilon\} \implies L_1 \cap L_2 = ...$
5. Si $L_1 = \{a, ab, abb, \epsilon\} \implies L_1^C \cup L_1 = ...$
6. Si $L_1 = \{x : x \in \Sigma^* \wedge |x| \geq 2\} \implies L_1^C = ...$

Parte B

Además de los operadores anteriores se cuenta también con el de **concatenación**, que va a ser fundamental para comprender los formalismos que serán vistos en el curso.

Una notación que se usará frecuentemente para referirse a la concatenación de una secuencia de símbolos es la de *potencia*. Por ejemplo: $a^4 = a.a.a.a$ y $(a.b)^2.c = (a.b).(a.b).c$.

Entonces:

1. Si $w = \epsilon$ y $w' = ab^2 \implies w.w' = ...$
2. Si $w = a^2$ y $w' = ab^2 \implies w.w' = ...$
3. Si $w = a^3b^2c^5 \implies w^0 = ...$
4. Si $w = a^3b^2c^5 \implies w^2 = ...$
5. Si $w = a^2b^2c^5a^4 \implies w^2.w^r = ...$

Parte C

Utilizando el operador de concatenación y su **asociatividad**[2], pruebe que $a^m a^n.((bbb)^5)^0 = a^{n+m}$.

[2] $(x.y).z = x.(y.z)$

Parte D

Para finalizar, utilice el operador de **concatenación de lenguajes**[3] para hallar los lenguajes resultantes:

1. Si $L_1 = \{a, bb, bbc\}$ y $L_2 = \{aa, ba\} \implies L_1.L_2 = ...$
2. Si $L_1 = \{a, bb, bbc\}$ y $L_2 = \{aa, \epsilon\} \implies L_1.L_2 = ...$
3. Si $L_1 = \{0^n : n > 0\}$ y $L_2 = \{1\} \implies L_1.L_2 = ...$
4. Si $L_1 = \{0^n : n > 0\}$ y $L_2 = \{\epsilon\} \implies L_1.L_2 = ...$
5. Si $L_1 = \{0^n : n > 0\}$ y $L_2 = \{1, \epsilon\} \implies L_1.L_2 = ...$
6. Si $L_1 = \{0^n : n > 0\}$ y $L_2 = \{1^{n+1} : n > 0\} \implies L_1.L_2 = ...$
7. Si $L_1 = \{0^n 1^m : n > 0 \wedge m > 0\}$ y $L_2 = \{1^{n+1}0^n : n > 0\} \implies L_1.L_2 = ...$

Ejercicio 3

Utilizando los operadores y propiedades practicadas en el ejercicio anterior, intente realizar demostraciones por **inducción** justificando cada paso. Demuestre que:

1. $\{x : x = a^k \wedge k \geq 0\} \subset \{x : x = a^m b^n \wedge m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$
2. $\{x : x = (ab)^k c \wedge k \geq 0\} \subset \{x : x = (ab)^m c^n \wedge m \geq 0 \wedge n \geq 0\}$

Ejercicio 4

La relación R_L, que *divide* a Σ^* en diferentes clases de equivalencia según las características del lenguaje L, será un concepto central para la primera parte del curso. En este ejercicio se trabajará en ella.

Parte A

Defina la relación R_L para un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, siendo Σ un alfabeto cualquiera.

Parte B

¿Son las siguientes afirmaciones verdaderas o falsas? ¿Por qué?

1. $L_a = \{0^m a^n : n \geq 0 \wedge m \geq 0 \wedge n \neq m\} \implies 0aa \; R_{L_a} \; 00aaa$
2. $L_b = \{a^n b^{2k} c^j a^{2n} b^k : j \geq 0 \wedge k \geq 0 \wedge n \geq 0\} \implies abbc \; R_{L_b} \; abbcc$
3. Sean $L_c = \{a^j b^n c^m a^k : j > 0 \wedge n > 0 \wedge m > 0 \wedge k > 0 \wedge n \leq m \wedge m \leq 2n \wedge j > k\}$ y $w \in \{a, b, c\}^*$. Entonces se cumple $wR_{L_c}aaa \implies |w|_a > 3$
4. $L_d = \{a_1...a_n a_{n+1} \# b_1...b_n \# b_n...b_1 : n > 0 \wedge a_i \in \{0, 1\} \wedge b_i \in \{0, 1\} \wedge b_i = a_i \; XOR \; a_{i+1}\}$ $\implies 101 \; R_{L_d} \; 10$

Nota: Asuma que el alfabeto Σ de cada lenguaje está compuesto por los símbolos necesarios para definirlo[4].

[3] Se define como una extensión del operador de concatenación de tiras: $L_1.L_2 = \{x.y : x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$
[4] Por ejemplo: $\Sigma = \{0, a\}$ para L_a

Ejercicios complementarios

Ejercicio 5

Parte A

Defina por **extensión** y **comprensión** los siguientes lenguajes, indicando además el alfabeto sobre el que están definidos:

1. Los marcadores posibles para un partido de fútbol. Asumamos que el máximo es de 2 goles para cada lado $(2-2)$.
2. Los créditos posibles para un curso de la facultad. Asumamos que el máximo es de 30 créditos, brindados por el *Proyecto de grado*[5].

Parte B

Defina por **comprensión** el lenguaje conformado por los años desde el 0 al actual, inclusive, respetando que todos los 0 presentes sean significativos.

Ejercicio 6

Para cada uno de los siguientes pares de lenguajes L_1 y L_2, halle:

- $L_1.L_2$
- $L_1 \cap L_2$
- L_1^r
- $pref(L_1).suf(L_2)$

1. $L_1 = \{0.0^n : n \geq 0\}$ y $L_2 = \{0^n : n \geq 0\}$
2. $L_1 = \{0^n1^n : n > 0\}$ y $L_2 = \{0^n1^m : n > 0 \wedge m > n\}$
3. $L_1 = \{0^n1^n : n\ es\ primo\}$ y $L_2 = \{0^n : n > 0\}$

[5] `https://eva.fing.edu.uy/course/view.php?id=627`