# Fluidos “más reales”

*Ismael Núñez*

## 1. Viscosidad

El modelo de los fluidos en los que se puede despreciar el rozamiento interno entre sus partes y con las paredes que lo contienen, es útil pero en muchos casos es una aproximación muy gruesa. En el caso de los gases y de algunos líquidos como el agua, la aproximación funciona bien si el recorrido del flujo no es muy extenso. Si no es así, el rozamiento hará un trabajo no despreciable que producirá una disipación de energía en el flujo, lo que se conoce en hidráulica como una *pérdida de carga*.

El estudio de un fluido con rozamiento interno se puede hacer analizando el movimiento en capas paralelas a la dirección de la velocidad. Cada una de ellas, de espesor infinitesimal, tendrá una velocidad diferente a las otras. En particular, la capa adyacente a la frontera fija del recipiente se encuentra en reposo si el líquido moja la superficie contenedora. Luego, las velocidades de las sucesivas capas va aumentando a medida que nos alejamos de las fronteras y nos aproximamos al seno del fluido. Esta enfoque requiere la hipótesis de que el flujo es *laminar*, lo que significa que las capas de fluido no se mezclan unas con otras. Si las velocidades son bajas y las dimensiones transversales al flujo son pequeñas, las hipótesis generalmente aplican.

La presencia de rozamiento implica la existencia de fuerzas paralelas al movimiento (*fuerzas tangenciales*), situación que no existe en el modelo de fluido ideal sin rozamiento, en el que las fuerzas solamente pueden ser normales a las superficies.

Un resultado empírico obtenido por Newton se deduce con ayuda del esquema de la figura 1 y es válido para un conjunto muy extenso de fluidos. Supongamos que cada capa de fluido se mueve con una velocidad diferente pero constante en el tiempo. Para que esto suceda, una capa cualquiera del fluido, que llamaremos *capa 1* en la figura 1, ejerce una cierta fuerza tangencial $F$ sobre cierta área $A$ (normal al eje $y$) de la capa 2. Esta capa se mueve con una velocidad constante señalada como $v + dv$ en la figura, por lo que la capa 3 le debe ejercer una fuerza $-F$ (no indicada en la figura) a la capa 2. Por la tercera ley de Newton, la capa 2 le ejercerá entonces a la capa 3 la fuerza $F$. Así sucesivamente cada capa ejerce la misma fuerza tangencial $F$ en una misma área $A$ sobre la capa de fluido adyacente. El resultado propuesto por Newton, es que esta fuerza tangencial por unidad de área en la dirección en que se desplaza el fluido es directamente proporcional al gradiente de velocidad en la dirección perpendicular a la velocidad. Esto es,

$$\frac{F}{A} = \eta \frac{dv}{dy} \tag{1}$$

El coeficiente $\eta$ solamente depende del fluido y de la temperatura, se llama *coeficiente de viscosidad dinámico*. Los fluidos que verifican esta propiedad reciben el nombre de *fluidos newtonianos*. Los gases y la mayoría de los líquidos lo son. Otros como los geles y los plásticos líquidos (pinturas, etc.) no mantienen constante el coeficiente de viscosidad, sino que éste depende del tiempo durante el cual se aplica la fuerza. Como la fuerza $F$ es la misma para todas las capas, tenemos que la derivada del segundo miembro de (1) es independiente de $y$, con lo cual la velocidad del fluido varía linealmente con $y$ en la figura 1, siendo nula en la capa limite que debe de estar adherida a la superficie fija.

De acuerdo a su definición, ec. (1), el coeficiente de viscosidad (brevemente llamado *la viscosidad*) tiene unidades de Pa.s (Pascal.segundos), también llamado dap (decapoise)[1]. La viscosidad de algunos gases y fluidos newtonianos comunes se muestran en el cuadro 1 [1]. Obsérvese que los fluidos más comunes como el agua son unas mil veces menos viscosos que los aceites, y a su vez los gases son cien

[1] En homenaje al físico francés Jean-Louis Poiseuille (1799-1869) que fue el primero en estudiar los flujos viscosos. De hecho la unidad base es el poise en el sistema c.g.s. En el S.I. la unidad es diez poises

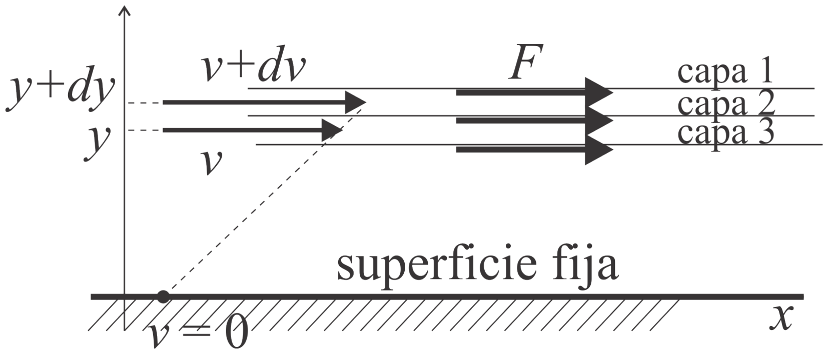



Figura 1: Fuerza tangencial $F$ ejercida por cada capa de fluido sobre la inmediata inferior para que cada una de ellas se mueva con velocidad constante

| Fluido | $\eta$ (dap) |
|---|---:|
| glicerina (20ºC) | 1.5 |
| aceite de motor SAE 30 (0ºC) | 0.11 |
| aceite de motor SAE 30 (20ºC) | 0.03 |
| sangre (37ºC) | $4.0 \times 10^{-3}$ |
| agua (20ºC) | $1.0 \times 10^{-3}$ |
| agua (90ºC) | $0.32 \times 10^{-3}$ |
| aire (20ºC) | $1.8 \times 10^{-5}$ |
| $CO_2$ (20ºC) | $1.5 \times 10^{-5}$ |

Cuadro 1: Coeficientes de viscosidad de algunos fluidos

veces menos viscosos que el agua. Esta es la razón por la cual los modelos que desprecian la viscosidad en el agua y, con mayor razón, en los gases, funcionan bastante bien en la práctica.

## 2. Tubos cilíndricos

Un caso de especial importancia de aplicación para fluidos viscosos es la pérdida de energía (también llamada *pérdida de carga*) en tubos cilíndricos que transportan, por ejemplo, agua en trayectos más o menos largos. Aunque la viscosidad del agua sea baja, un caño de abastecimiento de agua para una vivienda, o, con mayor razón, en un sistema de riego, requiere recorridos de decenas de metros de longitud. En estos casos, no es posible tratar el fluido como no viscoso y aplicar simplemente la ecuación de Bernoulli para resolver los problemas.

De acuerdo a la ley de Bernoulli, entre dos puntos de una línea de corriente de un fluido de densidad $\rho$ que se mueve en un campo gravitatorio uniforme $-g\hat{e}_y$, existe la relación

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2, \tag{2}$$

donde $P, v, y$, son, respectivamente, la presión, la velocidad y la altura de cada uno de los puntos en la línea de corriente. Si el flujo fuera horizontal y, eventualmente, las velocidades del fluido en ambos puntos fuesen iguales, entonces la ley de Bernoulli nos indica que también lo serán las presiones.

La expresión (2) se obtiene a partir de la ley de conservación de la energía, que ignora las pérdidas por rozamiento que provienen de la existencia de la viscosidad del fluido. Si existe rozamiento de las capas de fluido entre sí y con las paredes del recipiente que lo transporta (digamos, un tubo), la igualdad de velocidades $v_1 = v_2$ a iguales alturas $y_1 = y_2$ requiere un trabajo externo contra el rozamiento sobre

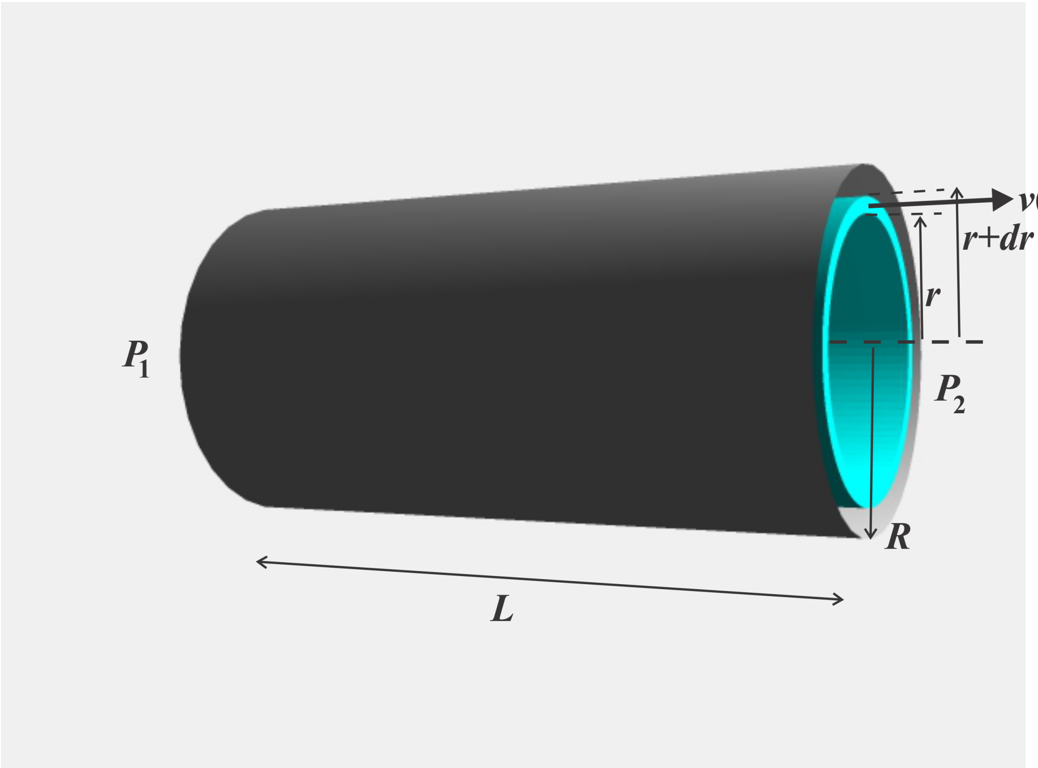



Figura 2: Deducción del perfil de velocidades para un fluido viscoso en un tubo horizontal

la porción de fluido entre ambos puntos. Este trabajo debe provenir de las fuerzas hechas sobre los extremos, por lo que se requiere que $P_1 > P_2$ si el fluido se mueve del punto 1 al punto 2.
Obtengamos el perfil de velocidades del fluido que va por un tubo cilíndrico horizontal, en régimen laminar y con velocidades constantes. No esperamos que la velocidad aumente linealmente con la distancia a las paredes fijas, como en el caso de la figura 1, puesto que ahora tenemos la condición de velocidad nula en todo el perímetro circular del tubo, por lo que tendrá un máximo en el eje del mismo. La figura 2 muestra un esquema de una porción de tubo cilíndrico de radio $R$ y longitud $L$. En esta geometría las capas de flujo laminar son cilindros de radio $r$ y espesor $dr$, como indica la figura. Asumimos que la velocidad de cada capa permanece constante, con lo que su valor solamente dependerá de la distancia $r$ al eje del caño cilíndrico, $v = v(r)$. La condición de frontera es que en el borde del tubo debe de ser $v(R) = 0$.
La expresión (1) nos indica que la fuerza interna $F_{int}$ ejercida por la capa cilíndrica entre $r$ y $r + dr$ sobre las capas interiores (esto es, todas las que están entre 0 y $r$) y sobre el área lateral del cilindro $A = 2\pi rL$, será

$$\frac{F_{int}}{2\pi rL} = \eta\frac{dv}{dr} \tag{3}$$

Obsérvese que la derivada de $v$ respecto de $r$ debe de ser negativa para $r > 0$, entonces esta fuerza interna es hacia la izquierda en la figura. Para mantener las velocidades constantes la diferencia de presiones entre los extremos de la porción de tubo debe ejercer una fuerza $F_{ext}$ que la anule. Particularmente se requiere que sea $P_1 > P_2$ y esta fuerza externa se ejerce sobre la base del cilindro en estudio, de área $\pi r^2$, por lo que será

$$F_{ext} = (P_1 - P_2)\,\pi r^2 \tag{4}$$

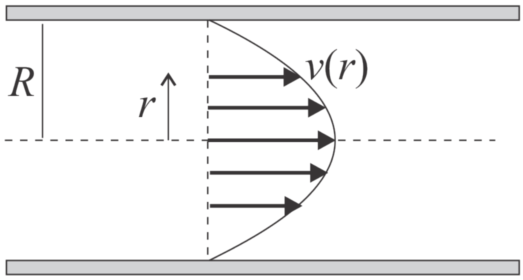



Figura 3: Perfil de parabólico de velocidades para un tubo cilíndrico que transporta un fluido viscoso con velocidades constantes

Entonces, según (4) y (3) obtenemos el resultado

$$F_{ext} + F_{int} = 0 \Rightarrow \frac{(P_1 - P_2)\, r}{2L} = -\eta \frac{dv}{dr} \tag{5}$$

Esta ecuación se integra inmediatamente, utilizando la condición de que $v(R) = 0$, de donde se obtiene

$$v(r) = \frac{(P_1 - P_2)\, R^2}{4\eta L} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \tag{6}$$

Este resultado muestra que el perfil de velocidades en el tubo cilíndrico es parabólico, con su valor máximo en el eje donde resulta

$$v(0) = \frac{(P_1 - P_2)\, R^2}{4\eta L} \tag{7}$$

La figura 3 muestra un esquema con el perfil resultante de velocidades.

Un problema importante en ingeniería hidráulica es obtener el flujo de masa de un fluido con viscosidad que viaja por un tubo cilíndrico, en función de la diferencia de presiones en sus extremos. Asumamos en principio que el tubo se encuentra horizontal. El flujo de masa se define como la cantidad de masa que fluye por unidad de tiempo a través de la sección transversal del tubo. Si la velocidad del fluido de densidad $\rho$ fuese igual a $v$ en toda la sección de área $A$ (caso de fluido no viscoso) el cálculo es inmediato. Resulta

$$\frac{dm}{dt} = \rho v A \tag{8}$$

En el caso de un fluido viscoso, la velocidad a través de cada elemento de área $dA$ es, en general, diferente. Se calcula entonces el flujo total de masa sumando los flujos a través de cada elemento de área en el que el fluido tiene un valor particular de velocidad $v$. Resulta entonces

$$\frac{dm}{dt} = \rho \int v\, dA \tag{9}$$

En el caso del caño cilíndrico de radio $R$, donde la velocidad solamente depende de la coordenada radial $r$, el elemento de área es $dA = 2\pi r\, dr$, la expresión (9) resulta

$$\frac{dm}{dt} = 2\pi\rho \int_0^R v(r) r\, dr \tag{10}$$

La expresión (10) se integra directamente sustituyendo (6), lo cual da (verifíquese)

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\pi \rho R^4}{8\eta L} (P_1 - P_2) \tag{11}$$

La expresión (11) es importante en la ingeniería hidráulica. Nos vincula directamente el flujo del liquido en kg/s con la diferencia de presiones entre los extremos del tubo de alimentación de longitud $L$ y radio $R$. Equivalentemente al flujo de masa se puede obtener el flujo de volumen (o gasto $Q$), utilizando en (11) que $m = \rho V$ y que el fluido es incompresible ($\rho$ es constante). Por lo tanto,

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\,(P_1 - P_2) \tag{12}$$

Por ejemplo, si estamos diseñando un abastecimiento de agua que debe proporcionar $Q$ litros por segundo a la salida de un caño de longitud $L$ y radio $R$, y la presión $P_2$ a la salida es la atmosférica, la expresión (12) me permite encontrar cuánto debe valer la presión $P_1$ a la entrada. Es interesante observar cómo el radio del caño limita el gasto, pues aparece a la cuarta potencia.

# 3. Régimen turbulento

Hemos dicho que las anteriores deducciones son válidas para un flujo en régimen laminar, y que esto tiene lugar cuando las velocidades son bajas. Naturalmente que también depende del radio del tubo o canal que transporta el fluido, así como de la densidad y viscosidad de éste. Existe una forma más cuantitativa de expresar las condiciones para que un flujo sea laminar o deje de serlo (pasa a flujo turbulento). El indicador para ello es un número adimensionado llamado *número de Reynolds* [2] *Re*.
Este número se puede definir utilizando técnicas de *análisis dimensional*. Esto es, utilizando las dimensiones en que se miden las magnitudes utilizadas en un problema. Por ejemplo, la dimensión de una masa (sin importar las unidades en que se mide: kg, g, etc.) se representa como M. La dimensión de una longitud es L y la del tiempo se indica con T. Tendremos, por ejemplo, que una velocidad (longitud/tiempo) tiene dimensiones $\mathrm{LT}^{-1}$, una fuerza (masa.aceleración=masa.longitud/tiempo$^2$) tiene dimensiones $\mathrm{MLT}^{-2}$, etc.
El fluido de densidad $\rho$ y viscosidad $\eta$ que viaja por un tubo, digamos de diámetro $D$, tiene una velocidad media (promediada sobre el área de la sección transversal) que indicaremos como $v$. Sabemos por experiencia que las altas velocidades producen un régimen turbulento, pero si la viscosidad es elevada y/o el diámetro del tubo es pequeño, el régimen se mantiene laminar aún para velocidades considerables. Se trata entonces de encontrar un número que vincule las cuatro magnitudes antes mencionadas, y que experimentalmente permita saber si nuestro fluido se encuentra en movimiento laminar o no. Para saber qué operaciones entre la densidad, la viscosidad y el diámetro del tubo nos dan proporcional a la velocidad, trabajamos con las dimensiones. Buscamos una ecuación que vincule estas magnitudes de la siguiente forma,

$$v \propto \eta^a \rho^b D^c \tag{13}$$

donde las potencias $a, b, c$ son a determinar con el análisis dimensional de la expresión (13). Para eso convertiremos la proporcionalidad dada en (13) en una ecuación dimensional. La dimensión de la velocidad es $\mathrm{LT}^{-1}$. Operando con las unidades, a partir de la definición de $\eta$ en (1) hasta llegar a las dimensiones básicas (masa, longitud y tiempo), obtenemos fácilmente que la dimensión de la viscosidad es $\mathrm{ML}^{-1}\mathrm{T}^{-1}$. La dimensión de la densidad (masa/volumen) es entonces $\mathrm{ML}^{-3}$. Entonces la expresión que buscamos debe de obedecer a la ecuación dimensional correspondiente a la expresión (13). Resulta

$$LT^{-1} = (ML^{-1}T^{-1})^a (ML^{-3})^b (L)^c \tag{14}$$

Los exponentes buscados han de ser tales que deben cancelar cada una de las dimensiones por separado. Para la masa M, la expresión (14) da que $0 = a + b$. Para la longitud L ha de verificarse que $1 = -a - 3b + c$, y finalmente para el tiempo T será $-1 = -a$. De estas tres ecuaciones obtenemos que

[2] Llamado así en homenaje a Osborne Reynolds, un físico irlandés quien lo introdujo en 1883

$a = 1$, $b = -1$ y $c = -1$. Esto significa que $v$ y la magnitud $\eta/(\rho D)$ tienen las mismas dimensiones. Entonces se define el número adimensionado $Re$ tal que

$$v = Re\frac{\eta}{\rho D} \tag{15}$$

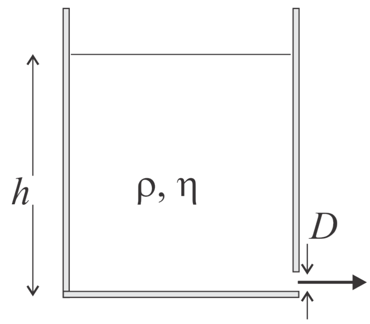
El número $Re$ obtenido en (15),

$$Re = \frac{\rho D v}{\eta} \tag{16}$$

se llama *número de Reynolds* para el fluido en estudio. Experimentalmente se encuentra que para números de Reynolds $Re < 2000$ el flujos es laminar. En tanto que por encima de 4000 es turbulento, aunque estos valores limites son aproximados. Entre ambos existe una zona de transición en la cual podrá ser a veces uno u otro régimen.

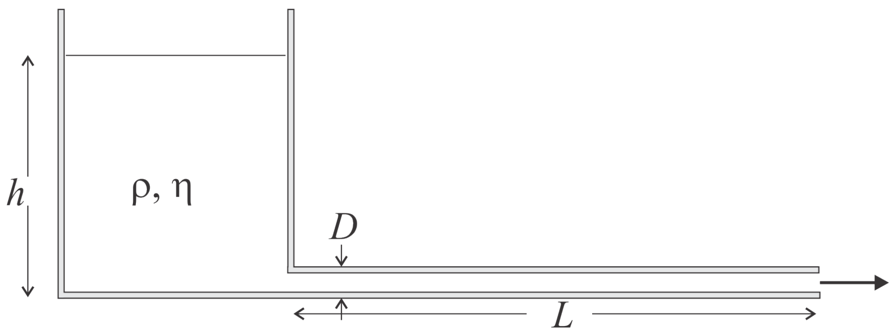
# 4. Ejercicio

## 4.1. Parte 1




Un recipiente contiene agua hasta una altura $h = 5$cm y tiene en el fondo un orificio circular de diámetro $D = 4$mm, como se indica en la figura de arriba. El recipiente está abierto en su parte superior y el área de su sección es mucho mayor que el área del orificio, de forma que puede despreciarse la velocidad de descenso del nivel de agua cuando está saliendo por el orificio. Supóngase que la pared del recipiente es suficientemente delgada como para que puedan despreciarse los efectos de la viscosidad en el orificio de salida.
a) Hállese el gasto $Q$ de salida en litros/segundo.
b) Hállese el alcance del chorro de agua si el orificio se encuentra a 20cm del suelo.

## 4.2. Parte 2



En el mismo recipiente del ejercicio anterior se le acopla un tubo horizontal cilíndrico de largo $L = 2$m, con el mismo diámetro interior que el orificio, como se indica en la figura de arriba.
a) Hállese ahora el gasto a la salida.
b) Si el caño horizontal se encuentra a 20cm del suelo, explicar por qué el chorro no tiene un alcance bien definido. Hállense los valores máximo y mínimo del alcance, siempre suponiendo que la altura del nivel del agua en el tanque no varía apreciablemente.
c) Calcúlese el número de Reynolds para este problema y discuta si las suposiciones hechas para resolverlo eran aceptables.

## Referencias

[1] Resnick, Halliday, Krane, *Física, Volumen 1*, 5ta. edición, Ed. CECSA,.