

Cap. 4 – Sonido

Matías Fernández y Paulo Valente,
Instituto de Física, Facultad de Ingeniería.

12 de abril de 2023

1. Descripción fenomenológica

Como una introducción a la naturaleza del sonido, podemos empezar recordando algunos hechos conocidos de la experiencia diaria.

- Golpes en objetos sólidos producen sonidos siendo la naturaleza de éstos muy distintas entre sí. La gran cantidad de instrumentos musicales nos permite apreciar una enorme variedad de sonidos, que son producidos por golpes cortos (percusión), cuerdas que vibran o simplemente soplando en cámaras de aires (vientos).
- También se sabe que el sonido no se propaga en el vacío. El primer experimento con el fin de demostrar esto ocurrió en 1660 y fue liderado por Robert Boyle. Consistió en colocar una sirena en una campana bien sellada, a la cual se le hizo vacío, quitándole el aire interior mediante una bomba. Ver figura 1. Inicialmente, se pone a sonar una sirena vibratoria y mientras se retira el aire de la campana la intensidad de sonido se reduce, mientras la sirena no deja de vibrar.
- Cuando vemos a la distancia una explosión de fuegos artificiales, observamos un atraso significativo entre la señal luminosa de una explosión y su respectivo sonido. De este fenómeno se puede concluir que el sonido es una información que viaja desde el punto de ocurrencia del evento hasta el observador, llevando un intervalo de tiempo para hacerlo. También se observa que la velocidad de propagación será bastante menor que la de la luz, que por su vez también es otro tipo de onda, cuya velocidad es extremadamente grande.
- Sabemos que nuestros oídos son los detectores primitivos de sonido y solo pueden detectar una franja restringida de frecuencias, típicamente entre $20Hz$ y $20KHz$, pero la franja audible exacta depende de cada individuo. Podes poner tu oído a prueba en: (Marque aquí, o busque por "Hearing Test" en youtube). Matías escuchó desde 36 Hz a 17 KHz; Paulo, desde 150 Hz a 12 KHz, aproximadamente.

Por otro lado, es sabido que los fluidos no resisten fuerzas cortantes. De lo visto en la introducción sobre los fenómenos ondulatorios, en particular sobre la existencia de ondas transversales, es necesario que el medio responda elásticamente a las fuerzas transversales (o cortantes). De lo anterior, deducimos que *los medios gaseosos en general solo admiten la propagación de ondas longitudinales*, como es el caso del *sonido*.

En el caso de los líquidos, vimos que las ondas en la superficie del agua tienen una componente longitudinal y una transversal. Esta última existe debido a las pequeñas fuerzas de cohesión del agua (prácticamente inexistente en medios gaseosos) que permiten un comportamiento ligeramente elástico para la componente transversal.

Las ondas de sonido pueden ser cualitativamente comprendidas imaginando el impacto sobre una superficie plana, como por ejemplo un platillo, un Gongo o la superficie de un instrumento de percusión (figura 2).

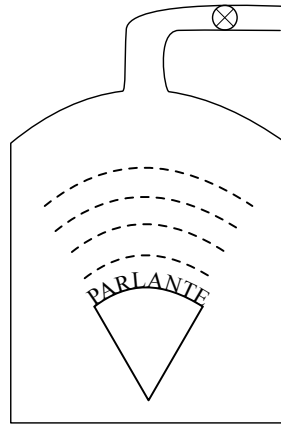


Figura 1: Diagrama de bomba de vacío. Experimento de Robert Boyle.

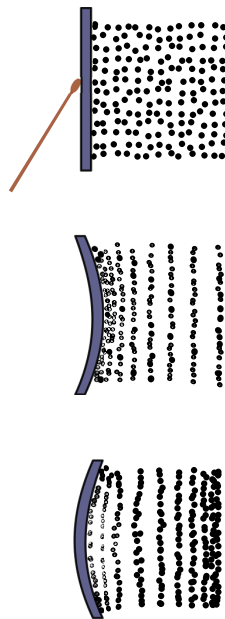


Figura 2: Desplazamiento del aire al golpear una membrana.

Al ser golpeada, la superficie sólida sufre un aumento de *presión*, que lleva a una deformación del plato, provocando así un *desplazamiento* de las primeras capas de fluido ubicadas en su entorno. Consecuentemente, ocurre un aumento en la *densidad* en la región adyacente. Esta perturbación se propagará generando la onda. De forma análoga, vemos también que una variación de densidad promueve una variación de presión, generando un desbalance local de las fuerzas que actúan sobre la porción de fluido, generando un desplazamiento. Cuando la superficie sólida retorna a su posición de origen crea una zona de baja presión y el fluido tenderá a retroceder a su posición original. Mientras dure la vibración del cuerpo sólido, el proceso se repite y la onda de sonido es generada. Así, podemos resumir el mecanismo de generación de ondas de sonido a través de un ciclo, como visto en la figura 3.

A continuación, buscaremos las relaciones matemáticas existente entre esas magnitudes, donde se obtendrá una ecuación de onda, equivalente a la que ha sido obtenida en el capítulo anterior para una cuerda.



Figura 3: Representación de los efectos asociados a la generación de la onda de sonido

2. Las ondas sonoras

Ahora vamos a obtener relaciones cuantitativas para las tres etapas del ciclo antes mencionado mediante una ecuación diferencial.

2.1. Densidad ↔ Volumen

Vamos primero relacionar la variación de volumen con la variación de densidad. Veamos qué sucede cuando la masa es considerada constante,

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho V,$$

podemos tomar su respectivo diferencial e igualarlo a cero

$$dm = \rho dV + V d\rho = 0,$$

es decir,

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho}. \quad (1)$$

2.2. Densidad ↔ Presión

No existe una relación general, válida para todos los materiales y condiciones, entre la presión y la densidad. Sin embargo, si hacemos una separación entre dos grandes grupos: 1) sólidos y líquidos y 2) gases, es posible encontrar algunas aproximaciones bastante útiles.

2.2.1. Medios no gaseosos

El módulo volumétrico B ha sido definido en el primer capítulo,

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V/V}, \quad (2)$$

o sea, si reescribimos esa ecuación como

$$\Delta P = -B \Delta V/V, \quad (3)$$

vemos que B es la constante de proporcionalidad entre una variación de presión sobre el cuerpo y su respectivo cambio relativo en volumen. Es útil para sólidos y líquidos, conocidos por su muy baja compresibilidad.

Usando el resultado 1 en la ecuación (2), encontramos

$$B = \rho \frac{\Delta P}{\Delta \rho}. \quad (4)$$

y la relación entre presión y densidad queda:

$$\Delta P = \frac{B \Delta \rho}{\rho}. \quad (5)$$

2.2.2. Medios gaseosos

Los gases son medios altamente compresibles y la relación entre presión y densidad no siempre asume una forma sencilla. En general, dependerá del tipo de gas y también del proceso involucrado. De forma general, si llamamos a la presión en el punto x como $P(x)$, en el momento de la perturbación, entonces

$$\begin{aligned} P(x, t) &= P_0 + \delta P(x, t), \\ \rho(x, t) &= \rho_0 + \delta \rho(x, t), \end{aligned} \quad (6)$$

donde $\delta P(x, t)$ y $\delta \rho(x, t)$ representan las pequeñas perturbaciones de presión y densidad respectivamente. Por otro lado, P_0 y ρ_0 representan las propiedades medias del medio. Como $\delta P \ll P_0$ y $\delta \rho \ll \rho_0$, podemos decir que

$$\frac{\delta P}{\delta \rho} = \frac{P - P_0}{\rho - \rho_0} \approx \left(\frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_0. \quad (7)$$

Es decir, la relación entre presión y densidad depende de la derivada parcial de P con respecto a ρ , calculada en el punto de equilibrio (P_0, ρ_0) . Para obtener tal relación, es preciso naturalmente conocer la función $P = P(\rho)$. Para ello, vamos anticipar un resultado que será obtenido en la tercera etapa del curso, cuando se estudien los gases ideales. En general, P_0 y ρ_0 dependen principalmente de la temperatura.

Para encontrar una relación relevante para la onda de sonido, usamos el hecho que los procesos que involucran la propagación de la onda son tan rápidos que no generan un intercambio de calor entre un elemento de volumen con su adyacente, siendo estos procesos llamados *adiabáticos*. O sea, en un Proceso adiabático no interviene intercambio de calor. Para un proceso de este tipo, valen las siguientes relaciones (que serán demostradas más adelante)

- $PV^\gamma = cte$
- $P = cte' \rho^\gamma$

donde γ es una constante que depende del tipo de gas. Podemos entonces calcular la derivada parcial de la presión con respecto a la densidad, utilizando la expresión arriba, obteniendo

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \quad (8)$$

Válida para cualquier medio gaseoso a una temperatura fija.

2.3. Relación Desplazamiento ↔ Densidad

Supongamos una onda unidimensional, longitudinal y limitada a un pequeño ducto (imaginario) cilíndrico. Vamos entonces a analizar el movimiento de un elemento de masa y volumen paso por paso, con el auxilio de la figura 4.

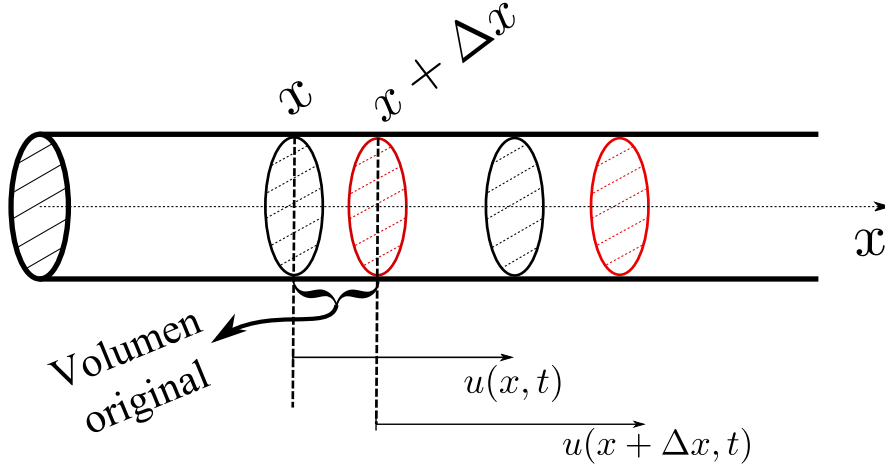


Figura 4: Diagrama del desplazamiento de aire dentro de un cilindro.

Sea $V_0 = A\Delta x$ un pequeño volumen, inicialmente en reposo, y cuyas caras ocupan las coordenadas x y $x + \Delta x$. Durante el paso de la perturbación, este cilindro se dilata. Tomemos $u(x, t)$ la función que representa el *desplazamiento* sufrido por la capa de fluido en la posición x en el tiempo t , de manera que $u(x + \Delta x, t)$ la respectiva nueva posición de la capa inicialmente ubicada en $x + \Delta x$.

En otras palabras, durante el paso de la ola ese volumen se desplaza y se dilata, de manera que el incremento de volumen ΔV está limitado por los desplazamientos $u(x + \Delta x, t)$ y $u(x, t)$. O sea,

$$\Delta V = +A[u(x + \Delta x, t) - u(x, t)] \quad (9)$$

Si multiplicamos y dividimos el lado derecho por Δx , obtenemos

$$\Delta V = A\Delta x \left[\frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x} \right] \quad (10)$$

$$\Delta V \approx A\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (11)$$

donde ha sido tomado el límite de $\Delta x \rightarrow 0$, para dar lugar a la derivada de u con respecto a x . Sustituyendo $V_0 = A\Delta x$, obtenemos

$$\Delta V = V_0 \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (12)$$

la cual puede ser expresada como

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (13)$$

Utilizando la ecuación (1) tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\Delta \rho}{\rho_0}. \quad (14)$$

Donde ρ_0 es el valor medio de la densidad. De la ecuación (6) podemos ver que $\Delta \rho = \rho - \rho_0 = \delta \rho$. Por ende, concluimos que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\delta \rho}{\rho_0}. \quad (15)$$

Podemos interpretar el signo de esta ecuación con el hecho de que un desplazamiento positivo ($\frac{\partial u}{\partial x} > 0$) genera un aumento de volumen y por lo tanto una disminución en la densidad.

Es muy importante notar que $u(x, t)$ representa el desplazamiento desde la posición de equilibrio, mientras que x representa la posición de esa capa en un sistema de coordenadas fijo en el espacio. *Siendo $u(x, t)$ en la misma dirección de la propagación, eso representa una onda longitudinal.*

2.4. Presión ↔ Desplazamiento

Tomemos el volumen original de la figura 4 que contiene el elemento de masa Δm

$$\Delta m = \rho V_0 \approx \rho_0 A \Delta x, \quad (16)$$

y hagamos el balance de fuerzas sobre las caras ubicadas entre x y $x + \Delta x$, donde las presiones en esas caras son

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \frac{\Delta F(x)}{A}, \\ P(x + \Delta x, t) &= \frac{\Delta F(x + \Delta x)}{A}. \end{aligned} \quad (17)$$

Así, la fuerza resultante sobre la masa Δm queda

$$\begin{aligned} \Delta F &= \Delta F(x) + \Delta F(x + \Delta x) \\ &\quad - A[P(x + \Delta x, t) - P(x, t)]. \end{aligned} \quad (18)$$

Si multiplicamos y dividimos el lado derecho por Δx , tenemos ,

$$\Delta F = -A[P(x + \Delta x, t) - P(x, t)] \frac{\Delta x}{\Delta x}. \quad (19)$$

$$\Delta F = - \underbrace{A \Delta x}_{V_0} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (20)$$

Es decir, la variación de presión se asocia a una pequeña fuerza ΔF , generando el desplazamiento. La aceleración del elemento es dada directamente por $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Con eso, componemos la ecuación de Newton para ese elemento de masa.

$$\Delta F = \Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \implies \rho_0 V_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -V_0 \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (21)$$

simplificando obtenemos,

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (22)$$

Con eso, complementamos el ciclo y podemos construir una (o más) ecuación diferencial para el movimiento, y así determinar de qué depende la velocidad del sonido en el medio.

2.5. La ecuación de onda y su velocidad

Colectando los 3 resultados principales arriba obtenidos:

I

$$\delta P(x, t) = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \delta \rho(x, t) \quad (23)$$

II

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = - \frac{\delta \rho(x, t)}{\rho_0} \quad (24)$$

III

$$\frac{\partial \delta P(x, t)}{\partial x} = -\rho \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (25)$$

Ahora vamos a ejecutar algunos pasos matemáticos. Usando la ecuación (24) para despejar $\delta\rho$ y sustituirlo en la ecuación (23):

$$\delta P = \frac{\gamma P_0}{\rho_0} \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \rho_0 \right) = -\gamma P_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (26)$$

Derivando ambos lados con respecto a x obtengo

$$\frac{\partial \delta P}{\partial x} = -\gamma P_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (27)$$

Podemos simplificar la notación sabiendo que $\frac{\partial \delta P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (P(x, t) - P_0) = \frac{\partial P}{\partial x}$. Sustituyendo la (25) en (27) obtenemos la ecuación de la onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\gamma P_0}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (28)$$

que tiene la forma de una ecuación de onda, es decir, una función cualquiera $u(x-vt)$ satisface tal ecuación diferencial, con $v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ representando la velocidad de la onda.

Por último, notamos que el resultado $v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ puede ser generalizado recordando que $\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$, es decir, la velocidad de propagación depende de la derivada de P en función de la densidad, calculada en el punto de equilibrio. $\frac{\gamma P_0}{\rho_0}$ vale para un gas. Para el agua, vale el módulo volumétrico:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0 = \frac{B}{\rho_0} \Rightarrow v_{agua} = \sqrt{\frac{B}{\rho_0}}, \quad (29)$$

o, de forma general

$$v = \sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_0}. \quad (30)$$

2.6. Ondas armónicas

Las relaciones existentes entre P , ρ y u dejan claro que una de ellas puede ser suficiente para describir la onda, ya que a partir de una se obtienen las otras a través de las relaciones obtenidas en las secciones anteriores.

Si suponemos una onda de desplazamiento $u(x, t)$ en forma armónica, tenemos

$$u(x, t) = u_0 \cos(kx - \omega t + \phi). \quad (31)$$

Con $v = \frac{\omega}{k}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{1}{\nu}$ y, por ende, $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu$.

La onda de presión asociada se obtiene mediante las ecuaciones (8) y (15),

$$\delta p(x, t) = -\gamma P_0 \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (32)$$

Sustituyendo la relación que tenemos para u ,

$$\delta p(x, t) = \gamma P_0 k u_0 \sin(kx - \omega t + \phi). \quad (33)$$

Y como $v^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$ tenemos

$$\delta p(x, t) = \underbrace{\rho_0 v^2 k u_0}_{\mathcal{P}_0} \sin(kx - \omega t + \phi). \quad (34)$$

Finalmente, obtenemos la expresión simplificada para la variación de presión

$$\delta p(x, t) = \mathcal{P}_0 \text{sen}(kx - \omega t + \phi). \quad (35)$$

Donde $\mathcal{P}_0 = \rho_0 v^2 k u_0$ es la amplitud de la onda de presión. Esta ecuación está en cuadratura con la ecuación de onda asociada al desplazamiento. O sea, cuando el desplazamiento es mínimo, la presión es máxima, y vice-versa. Por otro lado $\delta P \propto \delta \rho$, por lo tanto, la onda de presión tiene la misma fase que la onda de densidad.

3. La intensidad de sonido

Como todas las ondas, el sonido transporta energía. La determinación correcta de este flujo de energía es importante para aplicaciones tecnológicas, pero principalmente por razones humanas. Es muy importante determinar cuáles son los límites aceptables de intensidad sonora soportable por los tejidos biológicos, ya que hoy vivimos en un mundo mucho más ruidoso que el natural, especialmente en zonas urbanas. Las máquinas en general y el uso irresponsable de la amplificación electrónica son capaces de producir sonidos que superan, muchas veces, las capacidades de respuesta del oído humano, causando lesiones temporales (y eventualmente permanentes) sobre el aparato auditivo. Y como todo instrumento, su correcta calibración empieza con una buena descripción de los principios físicos.

3.1. Potencia transmitida e intensidad

La potencia se relaciona con el incremento de fuerza instantáneo δF (existente debido al incremento de presión) y la velocidad de propagación de la onda. A su vez, la fuerza se vincula con la presión de la onda δp y con el área de la sección transversa A mediante

$$\delta F = \delta p(x, t)A. \quad (36)$$

La velocidad de la onda se puede obtener a partir del desplazamiento $u(x, t)$, resultando que la potencia W_0 tome la siguiente expresión

$$W_0(x, t) = \delta F \dot{u} = \delta p(x, t)A \frac{\partial u}{\partial t} \quad (37)$$

o sea,

$$W_0 = A \mathcal{P}_0 \text{sen}(kx - \omega t + \phi) \omega u_0 \text{sen}(kx - \omega t + \phi) \quad (38)$$

Notar que en la expresión de arriba, $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$, NO es la velocidad de propagación del sonido $v = \frac{\gamma P_0}{\rho_0}$. La potencia, que es la energía por segundo, se relaciona con la intensidad (energía por segundo y área), mediante $I = \frac{\overline{W_0}}{A}$, donde la barra significa la media en un periodo. Por lo tanto, haciendo la sustitución $\mathcal{P}_0 = \rho_0 v^2 k u_0$, tenemos

$$I(x, t) = \rho_0 v^2 k \omega u_0^2 \underbrace{\overline{\text{sen}^2(kx - \omega t + \phi)}}_{1/2} \quad (39)$$

Tomando el promedio en un período, obtenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{u_0^2 \rho_0 v \omega^2}{2} && \text{En término de la amplitud de desplazamiento.} \\ I &= \frac{\mathcal{P}_0^2}{2 \rho_0 v} && \text{En término de la amplitud de presión.} \end{aligned} \quad (40)$$

Las ventajas asociadas a la última expresión son básicamente 2:

- Es relativamente más sencillo construir medidores de presión que de desplazamiento.
- La expresión no depende de la frecuencia, sólo depende de ρ_0 y v , que son constantes, dadas las condiciones iniciales del medio.

3.2. Escala logarítmica

En la práctica, cuando una magnitud puede tener una variabilidad muy grande, como por ejemplo la intensidad del sonido, que puede ir desde varios W/m^2 hasta valores menores que $10^{-12}W/m^2$, es común utilizar una escala logarítmica. Para ello, se suele tomar un valor práctico que nos sirva de referencia I_0 y tomar el logaritmo de la relación entre I medido con I_0 , o sea $\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$. A esta escala se la denomina “bel”. En el caso del sonido, es común el uso del “decibel”, es decir:

$$I[dB] = 10\log\left(\frac{I[SI]}{I_0[SI]}\right) \quad (41)$$

En el caso del sonido, es usado el valor $I_0 = 10^{-12}W/m^2$, que corresponde al límite inferior promedio para la audición humana. Por último notamos que el valor elegido de I_0 no es una referencia absoluta, pudiendo ser cualquier intensidad conocida que actúe de referencia.

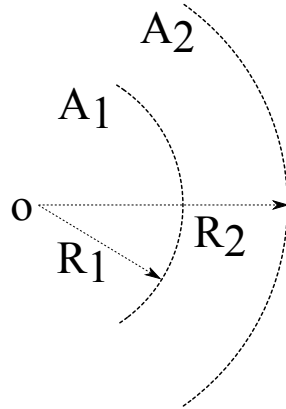
Podemos invertir la ec. anterior

$$I[SI] = I_0[SI]10^{I[dB]/10} \quad (42)$$

3.3. Onda en 3D

Las ondas de sonido reales en general se propagan en todas las direcciones del espacio. Para una fuente puntual, la frente de onda tendrá una forma esférica, siempre que no existan obstrucciones o discontinuidades en el medio material, como por ejemplo una pared, que reflejará (la mayor parte) de la onda, o la interfaz con otro medio.

Por otro lado, sabemos desde la experiencia diaria que la intensidad del sonido disminuye cuando nos alejamos de la fuente.



Entonces veamos una fuente puntual de potencia W_0 . Esta onda tiene forma esférica, cuyo radio va aumentando a medida que la misma se propaga desde la fuente. Por ende, la intensidad en el punto 1 será $I_1 = \frac{W_0}{A_1}$, donde A_1 es el área de la superficie esférica de radio R_1 , es decir, $A_1 = 4\pi R_1^2$. Análogamente, $I_2 = \frac{W_0}{4\pi R_2^2}$. De forma general,

$$I(r) = \frac{W_0}{4\pi r^2} \quad (43)$$

Eso no significa que no podemos aplicar los fundamentos matemáticos que vimos. Aparte de la reducción de la intensidad con la distancia recorrida, todo el formalismo estudiado hasta ahora para las ondas unidimensionales, ya que siempre es posible trazar una recta entre el punto de observación y la fuente que emite el sonido.

Vale también decir que el mismo efecto ocurre para las ondas luminosas. Para los cuerpos celeste, por ejemplo, apenas se nota su brillo de una estrella distante, en comparación con la luminosidad de otra estrella muy cercana, el Sol.

4. Ondas estacionarias

De la misma manera que hemos analizado las condiciones de borde y las ondas estacionarias en una cuerda con extremos fijos, podemos entender el comportamiento del sonido en ductos de aire. Para ello debemos considerar dos tipos de extremidades: *abierta* y *cerrada*. Esta diferencia impone condiciones diferentes sobre las ondas de presión y desplazamiento, $\delta P(x, t)$ y $u(x, t)$.

- a) **Abierta** En un extremo abierto, la presión debe de ser aproximadamente constante e igual a la presión atmosférica, P_0 . Por lo tanto, la onda de presión debe de ser nula $\delta P(0, t) = \delta P(L, t) = 0$, recordar la expresión (6). Los extremos se encuentran en la posición $x = 0$ y $x = L$, de ahí las condiciones impuestas recientemente. Por otro lado, un extremo libre no promueve resistencia al desplazamiento, por lo tanto se espera un máximo (lo que concuerda con que δP sea nulo) para el desplazamiento de los bordes, o sea, $u(0, t) = u(L, t) = u_m$.
- b) **Cerrada** En este caso, es el desplazamiento que debe ser nulo en el borde, llevando a que la presión sea máxima sobre la pared. Si imaginamos al tubo cerrado en $x = L$ y abierto en $x = 0$, tendremos

$$\begin{cases} u(L, t) = 0 \longleftrightarrow P(L, t) = P_{max} \\ u(0, t) = u_{max} \longleftrightarrow P(0, t) = 0 \end{cases} \quad (44)$$

En cualquiera de los dos casos, se formará una onda estacionaria dentro del ducto, a causa de la superposición de dos ondas que se propagan en sentidos contrarios.

Podemos entonces aprovechar el resultado del capítulo 3. Una onda estacionaria tiene la siguiente forma:

$$y(x, t) = A \cos(kx + \delta) \cos(\omega t + \phi_0) \quad (45)$$

Vamos analizar el caso de la onda de presión. Para las ondas de desplazamiento es suficiente cambiar $\cos \rightarrow \sin$. Los resultados serán idénticos.

$$p(x, t) = \mathcal{P}_0 \cos(kx + \delta) \cos(\omega t) \quad (46)$$

donde se simplifica la notación $\delta P \rightarrow p$.

4.1. Extremos libres

Imponiendo la condición de borde discutida arriba, tenemos que

$$\begin{aligned} p(0) = 0 \Rightarrow \cos(\delta) = 0 \Rightarrow \delta_m &= \left(\frac{2m+1}{2}\right)\pi; & m = 0, 1, 2, \dots \\ p(L) = 0 \Rightarrow \cos(kL + \delta) = 0 \Rightarrow kL + \delta_m &= \left(\frac{2m'+1}{2}\right)\pi; & m' = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (47)$$

De estas dos ecuaciones podemos obtener

$$kL = (m' - m)\pi, \quad (48)$$

y utilizando la relación $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, tenemos

$$\lambda = \frac{2L}{m' - m}. \quad (49)$$

Como m y m' son enteros, su diferencia también lo será. Redefinimos $m' - m \rightarrow m$ y tomamos los enteros positivos obteniendo finalmente

$$\lambda = \frac{2L}{m}. \quad (50)$$

Esta última expresión muestra las longitudes de onda posibles en un ducto con salidas abiertas. Utilizando la primera de las condiciones, $\delta_{m=0} = \frac{\pi}{2}$ y el hecho de que $\cos(kx + \frac{\pi}{2}) = -\sin(kx)$ en donde el signo de menos no va ser relevante para nuestro problema.

Por lo tanto, tenemos

$$p(x, t) = -\mathcal{P}_0 \sin(kx) \cos(\omega t), \quad (51)$$

En resumen,

- Si $kx_{max} = \frac{2m+1}{2}\pi$ entonces tendremos un máximo.
- Si $kx_{min} = m\pi$ entonces tendremos un mínimo.

La distancia entre dos máximos será

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x_{(m+1)}^{max} - x_m^{max}) = \frac{\pi}{2} (2(m+1) + 1 - 2m - 1) = \frac{\lambda}{2} \quad (52)$$

La misma distancia se encuentra para los mínimos (nodos). Un resultado idéntico se ha encontrado para el desplazamiento de una cuerda.

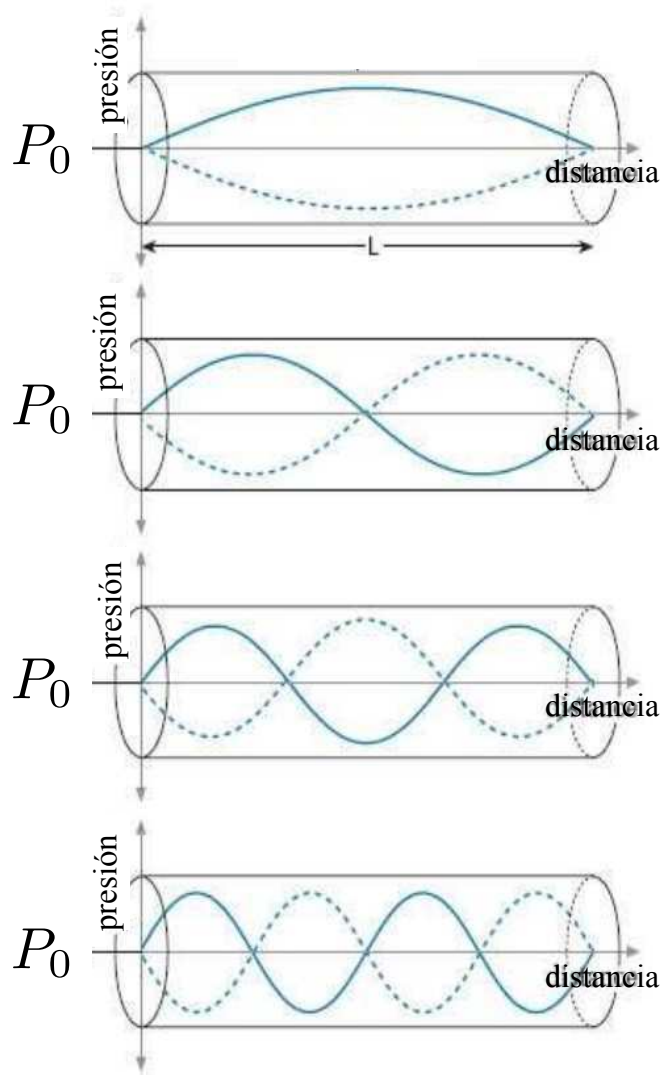


Figura 5: Patrones de ondas estacionarias correspondientes a ondas de presión en un tubo abierto en los dos extremos para distintos modos.

4.2. Un extremo fijo en $x = L$

Para $x = 0$ tendremos el tubo abierto, por lo que tenemos,

$$p(0) = 0 \Rightarrow \cos(\delta) = 0 \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2}.$$

Mientras que en $x = L$ estará cerrado, por lo tanto:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= -\mathcal{P}_0 \text{sen}(kx), \\ p(L, t) &= -\mathcal{P}_0 \text{sen}(kL) = -\mathcal{P}_0. \end{aligned} \quad (53)$$

$$kL = \frac{2m+1}{2}\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = \frac{2m+1}{2}\pi. \quad (54)$$

Entonces,

$$\lambda_m = \frac{4L}{2m+1}. \quad (55)$$

También aquí podemos calcular la distancia entre los máximos y mínimos obteniendo el mismo resultado anterior: $\Delta x = \frac{\lambda}{2}$. Sin embargo, las longitudes de onda posibles son diferentes de lo que es observado con dos extremidades libres.

Debido a que el desplazamiento del fluido por donde el sonido se propaga tiene un desfase de $\frac{\pi}{2}$ con la presión, en donde hay un máximo de presión habrá un cero de desplazamiento, y vice versa.

Podemos concluir observando las figuras que las λ_m nos dice que no se propagarán todas las longitudes de ondas sino que sólo aquellas condicionadas por la geometría del medio en las que se propagan. Tanto para una cuerda con extremos fijos o una columna de aire en un ducto, vemos que existen frecuencias preferenciales de oscilación. Estos modos son llamados modos normales de vibración y las frecuencias se llaman frecuencias de resonancia.

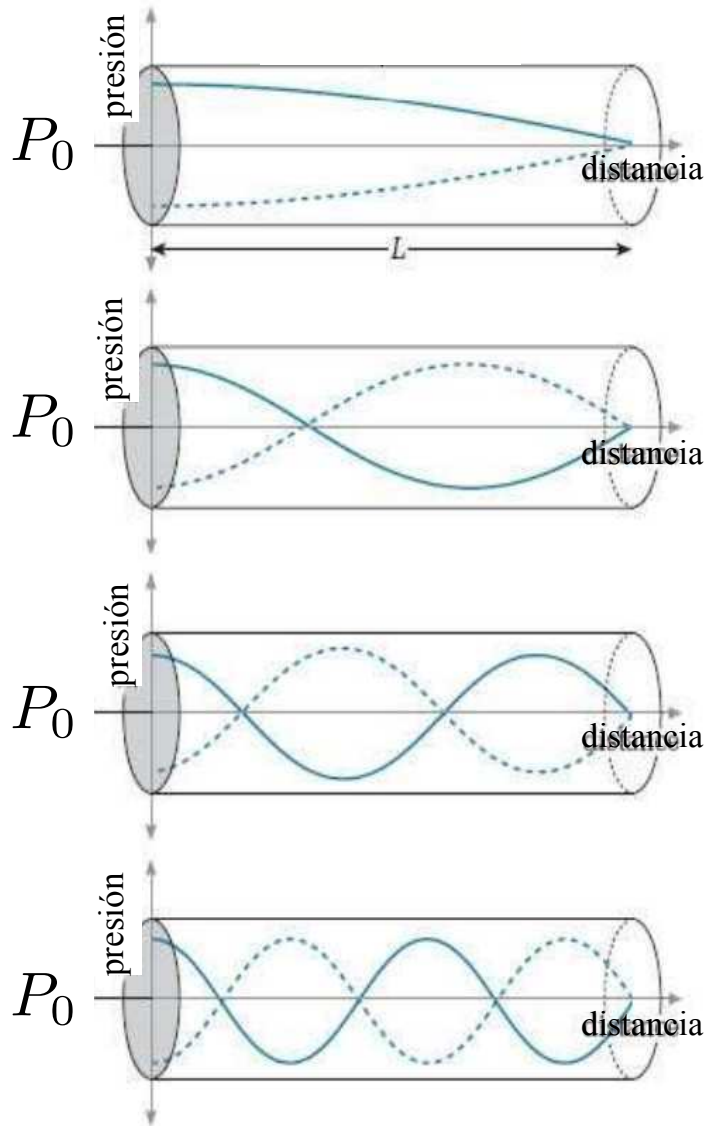


Figura 6: Patrones de ondas estacionarias correspondientes a ondas de presión en un tubo cerrado a la izquierda y abierto en el otro extremo para distintos modos.

5. Efecto Doppler

Vimos anteriormente que la velocidad del sonido v_s en un medio gaseoso depende básicamente de las características del medio, $v_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$. La velocidad es una medida vectorial y que depende del referencial con el cuál ha sido medida. En nuestro caso P_0 y ρ_0 corresponden al aire en reposo, y por lo tanto a un referencial solidario con la atmósfera, fijo a la tierra en ausencia de viento.

Digamos que una fuente sonora fija a la tierra emite una frecuencia ν_0 percibida por un observador también fijo a la tierra. Entonces nos preguntamos qué frecuencia ν será

medida cuando uno de los dos agentes (fuente u observador) esté en movimiento. Como v_s está medida con respecto al referencial fijo, el movimiento de la fuente y del observador tienen consecuencias distintas.

El *efecto Doppler* consiste en analizar con detalle la diferencia de frecuencia $\Delta\nu_{Doppler} = \nu - \nu_0$ observada cuando existe movimiento de la fuente o del observador. En la práctica notamos que cuando una locomotora (o una ambulancia) se acerca emite sonidos más agudos, mientras que al alejarse el mismo sonido parecerá más grave, indicando un cambio apenas de percepción, ya que la fuente sonora emite una frecuencia propia ν_0 constante en el tiempo. El efecto del cambio en la frecuencia medida como función de su velocidad ocurre en diversos fenómenos ondulatorios, no solo en ondas de sonido. Podemos citar los radares, que utilizan ondas de radio para determinar la velocidad de los coches en las rutas y el examen biomédico conocido como Ecodoppler, que utiliza ondas de ultrasonido para medir la velocidad del sangre en el interior de vasos sanguíneos.

Hay diferentes formas de abordar el fenómeno. Para todos los casos, debemos de tener en cuenta la relación

$$v_s = \nu_0 \lambda_0 \quad (56)$$

O sea, si v_s está medida para el referencial en reposo, ν_0 y λ_0 son la frecuencia y longitud de onda propios de la fuente. A continuación, vamos a obtener el mismo resultado utilizando diferentes abordajes. En ambos casos, vamos a separar la discusión entre los dos casos posibles.

5.1. Abordaje empírico

5.1.1. Fuente parada, observador en movimiento

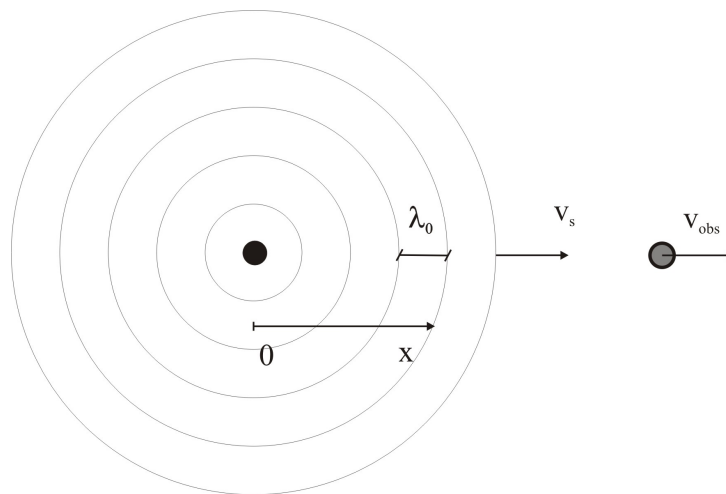


Figura 7: Efecto Doppler, fuente parada, observador en movimiento.

La figura 7 muestra una fuente sonora F , parada y ubicada en el origen de la coordenada x , congruente con la velocidad de un observador v_o , que en el ejemplo de la figura se está alejando de la fuente.

La fuente emite pulsos secuenciales, en intervalos de tiempo que corresponden al periodo de la onda sonora correspondiente, o sea $\tau_0 = 1/\nu_0$. Por lo tanto, la distancia entre dos frentes de onda consecutivos corresponde al longitud de onda λ_0 y la frecuencia propia es $\nu_0 = v_s/\lambda_0$. La frecuencia percibida corresponde al número de frentes de onda percibidas por unidad de tiempo. Si el observador se pone en movimiento él va observar más (o menos) frentes de onda por unidad de tiempo si está aproximándose (o alejándose) de la fuente. Naturalmente, si $v_o = \Delta x/\Delta t$, el tiempo que llevará para caminar una longitud de onda será $\tau = \lambda_0/v_o$. Por lo tanto, el incremento de frecuencia corresponde a

$$\Delta\nu = \pm \frac{v_o}{\lambda_0} \quad (57)$$

donde el + se refiere a la aproximación y el - al alejamiento. Así, la frecuencia efectivamente medida por el observador O es dada por

$$\nu = \nu_o \pm \frac{v_o}{\lambda_0} = (v_s \pm v_o) \frac{1}{\lambda_0}, \quad (58)$$

eliminando λ_0 , obtenemos

$$\nu = \nu_o \left(1 \pm \frac{v_o}{v_s} \right) \quad (59)$$

Donde

- + \rightarrow APROXIMACIÓN
- - \rightarrow ALEJAMIENTO

Indicando que la frecuencia percibida aumenta en el caso de aproximación y disminuye cuando ocurre el alejamiento.

Para comprender mejor el efecto del cambio aparente de la frecuencia, podemos fijarnos en un referencial que camina junto con la onda de sonido a velocidad v_s , en ese caso, veremos las ondas en reposo. Como en una fotografía, observamos una sucesión de máximos y mínimos de compresión. Este observador entonces no mide una frecuencia. Al moverse con respecto a la onda, detectará dos máximos consecutivos en el intervalo de tiempo $\tau_o = \lambda_0/v_o$, cuyo inverso corresponde al aumento de frecuencia argumentado anteriormente.

5.1.2. Observador parado, fuente en movimiento

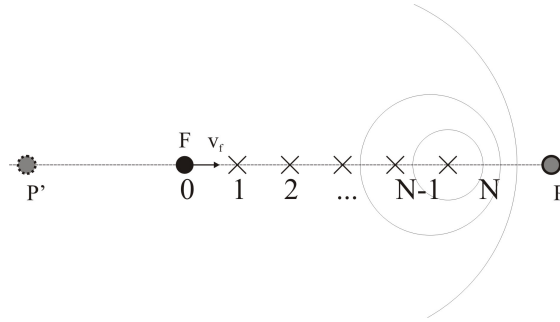


Figura 8: Efecto Doppler: observador parado, fuente en movimiento.

La figura 8 muestra como quedan los frentes de onda de una fuente puntual que se mueve con respecto al medio.

Considerando que la fuente se mueve con velocidad v_f (hacia el observador en el caso del punto P la figura y alejamiento para un observador ubicado en P'). La fuente emite un máximo en el instante t_0 cuando está ubicada en la posición 0; cuando emite su segundo máximo en t_1 , la fuente se encuentra en la posición 1. El inverso de la diferencia $t_N - t_{N-1}$ corresponde a la frecuencia propia de la fuente. Y la distancia recorrida en ese período es $x_N - x_{N-1} = v_f(t_N - t_{N-1}) = v_f/\nu_0$. Notamos también que todas las frentes de onda son círculos NO concéntricos, y cuyos radios son $R_0 = v_s(t_N - t_0)$, $R_1 = v_s(t_N - t_1)$, y así por delante.

Para el observador ubicado en el punto P, ocurrirá una reducción en la longitud de onda percibida, mientras que para el observador en P' ocurrirá un aumento de la longitud de onda. O sea, el observador en P (o P') va a ver medir la longitud de onda original λ_0

restado (o sumado) a la distancia $x_2 - x_1$, dependiendo si la fuente se está alejando (o acercándose) al observador. Es decir,

$$\lambda = \lambda_0 \mp (x_N - x_{N-1}) = \frac{v_s}{\nu_0} \mp \frac{v_f}{\nu_0} \quad (60)$$

Así, en el caso de la fuente en movimiento, quedamos con

$$\lambda = \lambda_0 \left(1 \mp \frac{v_f}{v_s} \right) \quad (61)$$

- - \rightarrow APROXIMACIÓN
- + \rightarrow ALEJAMIENTO

Como se ve, cuando la fuente está en movimiento, el observador ve un acortamiento del longitud de onda cuando se aproxima y un estiramiento cuando se aleja. Por otro lado, como la velocidad del sonido es la misma para ambos observadores, tenemos que $v_s = \lambda\nu = \lambda_0\nu_0$, o sea

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{\nu_0}{\nu} \rightarrow \nu = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{v_f}{v_s}}. \quad (62)$$

Vemos que la relación entre sonidos más graves y más agudos se mantiene la misma: en la aproximación se nota frecuencias mayores y en alejamiento se notan frecuencias menores que la original. Vemos también que los cambios de frecuencia no se obtienen simplemente de la velocidad relativa entre el observador y la fuente, ya que el sonido se propaga por el aire, que representa un referencial fijo.

5.1.3. Fuente y observador en movimiento

En ese caso, los dos efectos se superponen. resultando en la necesidad de efectuar las dos transformaciones sobre la frecuencia observada, o sea

$$\nu = \nu_0 \left(\frac{1 \pm \frac{v_o}{v_s}}{1 \mp \frac{v_f}{v_s}} \right) \quad (63)$$

donde los signos de arriba se utilizan para aproximación y los de abajo para el alejamiento.

5.2. Abordaje cinemático

Es posible obtener los resultados anteriores de una forma matemáticamente rigurosa, utilizando los conceptos de cinemática, para acompañar el movimiento de los componentes relevantes del problema: observador, fuente y los frentes de onda del sonido. Si todas las velocidades involucradas son consideradas constantes, el movimiento será rectilíneo y uniforme¹.

De la misma manera que en la sección anterior precisamos separar los dos casos distinguidos.

¹Extracto de la clase filmada de número 14, Docente: Sandra Kahan, Openfing

5.2.1. Fuente parada, observador en movimiento

Vamos entonces escribir las ecuaciones de movimiento para dos frentes de onda consecutivas y para el observador, conforme se observa en la figura 7. Considerando que la fuente está parada en el origen de las coordenadas, tenemos

$$x_o(t) = x_i + v_o t \quad (64a)$$

$$x_1(t) = 0 + v_s t \quad (64b)$$

$$x_2(t) = 0 + v_s (t - \tau_0) \quad (64c)$$

donde $x_o(t)$ representa la posición del observador que partió de x_i (arbitraria) y viaja en el sentido positivo del eje, y por lo tanto estamos considerando la situación de alejamiento. Las funciones x_1 y x_2 representan las trayectorias de dos frentes de onda consecutivos, cuyo intervalo de tiempo entre ellas es τ_0 , correspondiendo al periodo de dicha onda. O sea, $\nu_0 = 1/\tau_0$ es la frecuencia propia de la fuente sonora.

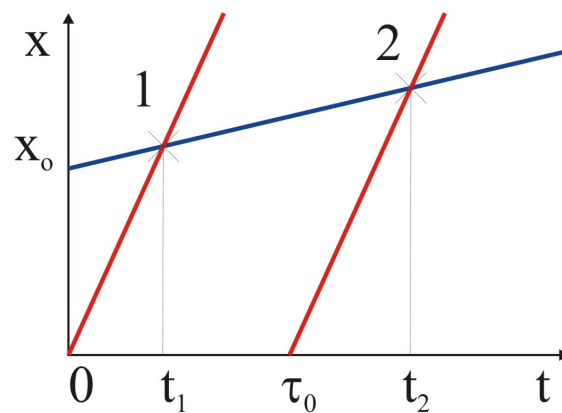


Figura 9: Posición en función del tiempo del observador y de dos frentes de onda consecutivos. Las intersecciones corresponden a la llegada de dichas frentes al sensor del observador.

La figura 9, muestra las trayectorias en función del tiempo de la fuente y dos frentes de onda consecutivos, que parten siempre del origen $x = 0$ y de instantes distintos ($t = 0$ y $t = \tau_0$). Las inclinaciones de las rectas corresponden a las velocidades, así las rectas rojas de alta pendiente representa la onda de sonido y la azul de pendiente suave representa el observador. Los dos puntos de intersección marcados, de coordenadas t_1 y t_2 representan los instantes de llegada de las ondas al observador. Por lo tanto, el intervalo $t_2 - t_1$ representa el periodo observado, o sea, la frecuencia buscada es

$$\nu = \frac{1}{t_2 - t_1}. \quad (65)$$

Para encontrar estos instantes de tiempo tenemos que imponer la condición de intersección

$$x_o(t_1) = x_1(t_1), \quad (66a)$$

$$x_o(t_2) = x_2(t_2), \quad (66b)$$

ed decir,

$$x_o + v_o t_1 = v_s t_1, \quad (67a)$$

$$x_o + v_o t_2 = v_s t_2 - v_s \tau_0. \quad (67b)$$

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones del cual podemos extraer el intervalo $t_2 - t_1$, resultando

$$t_2 - t_1 = \tau_0 \frac{v_s}{v_s - v_o}. \quad (68)$$

Es fácil ver que tomando el inverso de esta expresión deriva al resultado obtenido anteriormente.

$$\nu = \left(\frac{v_s - v_o}{v_s} \right) \nu_0, \quad (69)$$

válida para el caso de alejamiento. Para el caso de aproximación, es suficiente con cambiar el signo de v_o .

5.2.2. Fuente en movimiento, observador parado

Utilizando el mismo método, vamos considerar un observador parado sobre el origen de las coordenadas y una fuente que se mueve con velocidad v_f alejándose del observador. Con respecto a la figura 8, debemos ubicar el origen de coordenadas en el punto P y tomar v_f en sentido opuesto. Haciendo eso, las ecuaciones horarias quedan:

$$x_f(t) = x_i^f + v_f t \quad (70a)$$

$$x_1(t) = \alpha_1 - v_s t \quad (70b)$$

$$x_2(t) = \alpha_2 - v_s t \quad (70c)$$

Las constantes α_1 y α_2 corresponden a la posición que las frentes de onda tendrían en $t = 0$. Como veremos, no precisaremos determinarlas. La figura 10 muestra dichas trayectorias. El intervalo $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ corresponde al periodo propio de la fuente, o sea $\nu_0 = \frac{1}{t'_2 - t'_1}$. La magnitud buscada ahora es la diferencia $t_2 - t_1$, la intersección de las trayectorias de los frentes de onda con el origen de las coordenadas. Observe la diferencia de pendientes, que corresponde a una fuente que se mueve más lentamente que la onda.

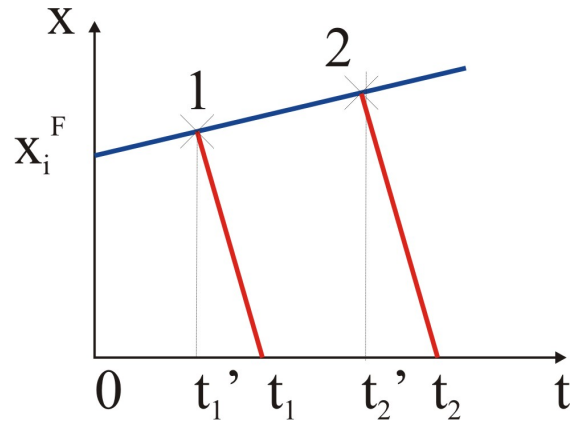


Figura 10: Posición en función del tiempo de la fuente y de dos frentes de onda consecutivos. Las intersecciones corresponden a los instantes en que los pulsos son emitidos por la fuente. La llegada de dichas frentes a la origen $x = 0$ corresponden a la detección del observador.

Aplicando las condiciones de encuentro

$$x_f(t'_1) = x_1(t'_1), \quad (71a)$$

$$x_f(t'_2) = x_2(t'_2), \quad (71b)$$

$$x_i^f + v_f t'_1 = \alpha_1 - v_s t'_1, \quad (72a)$$

$$x_i^f + v_f t'_2 = \alpha_2 - v_s t'_2, \quad (72b)$$

resultando en

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (t'_2 - t'_1)(v_s + v_f). \quad (73)$$

Pero como $x_1(t_1) = x_2(t_2) = 0$, tenemos que $\alpha_2 - \alpha_1 = v_s(t_2 - t_1)$. Sustituyendo esta ecuación en la (73), podemos despejar $t_2 - t_1 = \tau$, resultando en

$$\tau = \left(\frac{v_f + v_s}{v_s} \right) \tau_0 \quad (74)$$

y cuya inversa corresponde al resultado anteriormente obtenido.

$$\nu = \left(\frac{v_s}{v_f + v_s} \right) \nu_0 \quad (75)$$

válida para alejamiento. Para el caso en el que se están acercando es suficiente cambiar el signo de v_f .

5.2.3. Observador y fuente en movimiento

A partir del tratamiento cinemático es posible efectuar la deducción rigurosa del caso más general, lo cual es logrado escribiendo las ecuaciones horarias pertinentes. Así, considerando que el observador parte del reposo y ambos (observador y fuente) caminan en el mismo sentido

$$x_f(t) = x_i^f + v_f t \quad (76a)$$

$$x_o(t) = 0 + v_o t \quad (76b)$$

$$x_1(t) = \alpha_1 - v_s t \quad (76c)$$

$$x_2(t) = \alpha_2 - v_s t \quad (76d)$$

que corresponde al caso de la figura 11.

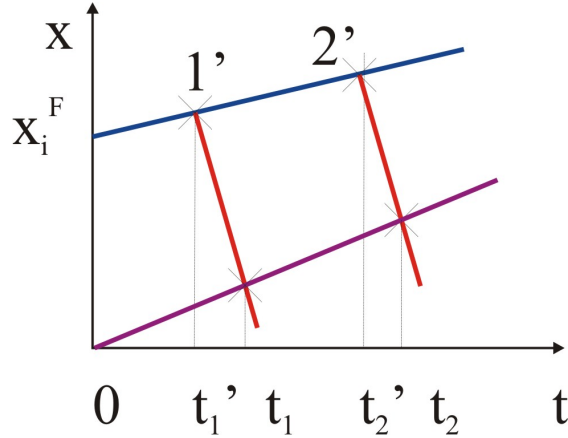


Figura 11: Posición en función del tiempo de la fuente (azul), del observador (violeta) y de dos frentes de onda consecutivos (rojas). Las intersecciones corresponden a los instantes en que los pulsos son emitidos por la fuente y sentidas por el observador.

Notemos que la condición obtenida anteriormente $\alpha_2 - \alpha_1 = (t'_2 - t'_1)(v_s + v_f)$ sigue inalterada. Ahora, el intervalo de tiempo buscado $t_2 - t_1$ es obtenido imponiendo la condición

$$x_1(t_1) = x_o(t_1), \quad (77a)$$

$$x_2(t_2) = x_o(t_2), \quad (77b)$$

que corresponden a las llegadas de los frentes de onda a las respectivas posiciones del observador.

$$\alpha_1 - v_s t_1 = v_o t_1, \quad (78a)$$

$$\alpha_2 - v_s t_2 = v_o t_2. \quad (78b)$$

Así,

$$\alpha_2 - \alpha_1 = (t_2 - t_1)(v_s + v_o). \quad (79)$$

Igualando las dos expresiones para $\alpha_2 - \alpha_1$ tenemos

$$t'_2 - t'_1 = (t_2 - t_1) \frac{v_s + v_o}{v_s + v_f}, \quad (80)$$

y cuyo inverso nos da el resultado concluido anteriormente con argumentos cualitativos.

$$\nu = \left(\frac{v_s + v_o}{v_s + v_f} \right) \nu_0. \quad (81)$$

El caso estudiado se refiere a una fuente que se aleja y un observador que se acerca. De la misma manera los otros casos se obtienen cambiando el signo de v_o y v_f .

5.3. Comentarios adicionales

Cuando dos observadores se mueven, sabemos que uno de ellos percibe la velocidad del otro según su propio referencial, o sea, mide la *velocidad relativa*. Así, los resultados obtenidos para el caso del observador en movimiento también pueden ser comprendidos si observamos que un observador que se mueve con respecto al aire ve la onda de sonido con una velocidad diferente. O sea, un observador que se mueve con velocidad \vec{v}_o mide entonces la velocidad \vec{v}'_s , donde

$$\vec{v}'_s = \vec{v}_s - \vec{v}_o, \quad (82)$$

aquí \vec{v}_s es la velocidad del sonido medida con respecto a un referencial en reposo. Como la longitud de onda no cambia en ese caso, la velocidad medida corresponde al paso de una longitud de onda en el intervalo de tiempo que corresponderá al periodo observado, o sea

$$|\vec{v}'_s| = \frac{\lambda_0}{\tau} = \lambda_0 \nu \quad (83)$$

Usando que $|\vec{v}_s| = \nu_0 \lambda_0$, obtenemos que

$$\nu = \nu_0 \frac{|\vec{v}_s - \vec{v}_o|}{|\vec{v}_s|} \quad (84)$$

que corresponde a lo que ha sido obtenido arriba. Vemos entonces que el observador en movimiento percibe el sonido con una velocidad distinta, causando el cambio de frecuencia, mientras que la longitud de onda no sufre alteraciones. O sea, quien desempeña el papel relevante es la velocidad relativa del observador con respecto al aire (no con respecto a la fuente).

El mismo razonamiento NO puede ser aplicado al caso de la fuente en movimiento, porque el observador parado mide el sonido con la misma velocidad v_s , mientras que la velocidad relativa entre la fuente y el aire no tiene una papel importante en el efecto.

5.3.1. El viento

Como el sonido se propaga por el aire, el valor $v_s = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$ obtenido anteriormente, corresponde a condiciones de aire estables. En condiciones de viento el propio compartimiento asume una velocidad con respecto a la tierra, por lo tanto, un observador parado (B) va a medir la velocidad del sonido modificada por la velocidad del aire, \vec{v}_A . Así, la velocidad del sonido será

$$\vec{v}_s^{(B)} = \vec{v}_s + \vec{v}_A. \quad (85)$$

Por otro lado, la longitud de onda no cambia, ya que las distancias no son afectadas por un cambio de velocidad. La relación entre longitud de onda (λ_0) y la frecuencia observada (ν) será dada entonces por

$$|\vec{v}_s^{(B)}| = \nu \lambda_0. \quad (86)$$

O sea, el viento hace con que la velocidad de sonido se modifique, cambiando también la frecuencia percibida.

5.4. Cono de Mach

Un detalle poco explicitado de las secciones anteriores es que en todos los casos hemos considerado las situaciones donde la fuente o el observador tienen velocidades menores que la velocidad típica de la onda (por ejemplo, la velocidad del sonido en el aire es $v_s = 343\text{m/s}$ a 20°C , un valor bastante alto para la mayoría de los vehículos). Sin embargo, esto no es un limitante físico. Los aviones llamados supersónicos pueden superar en muchas veces la velocidad del sonido y sus consecuencias precisan ser consideradas. Además, las ondas en agua tienen velocidad de propagación bastante baja (que puede variar de algunos centímetros a algunos metros por segundo, aproximadamente). Es un número fácilmente superado en embarcaciones y el fenómeno es más comúnmente visto como las ondulaciones laterales que producen una embarcación al desplazarse por la superficie.

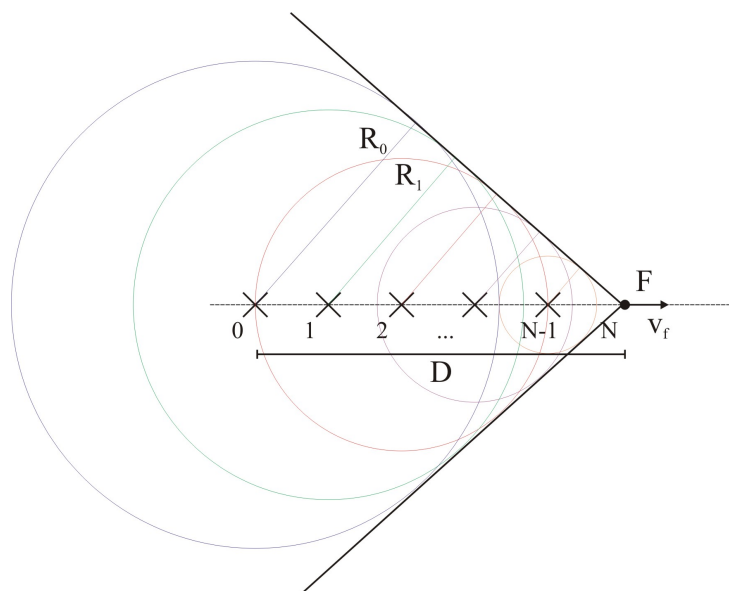


Figura 12: Representación de las frentes de onda cuando la velocidad de la fuente supera la velocidad de propagación de la onda y la formación del cono de Mach.

La figura 12 muestra qué pasa con las frentes de onda cuando $v_f > v_s$. Los puntos $0, 1, 2, \dots, N$ representan las posiciones de la fuente en intervalos de tiempo regulares, que difieren entre sí por un período propio de la onda. Los segmentos de círculos de la figura

representan los frentes de onda emitidos. El radio de esos círculos (R_N) representan la distancia viajada por la onda en cierto intervalo de tiempo.

Digamos que en un momento inicial t_0 , la fuente emite un pulso y después de N pulsos la fuente se encuentra a una distancia $D = v_f(t_N - t_0)$, o sea, el primer frente de onda se habrá propagado una distancia $R_0 = v_s(t_N - t_0)$, el segundo $R_1 = v_s(t_N - t_1)$, el tercero $R_2 = v_s(t_N - t_2)$, etc y $R_N = 0$. Como $v_f > v_s$, al revés de los círculos adensados que se observan en la figura 8, se ve la formación de un cono, causado por la superposición de los frentes de onda que se acumulan, causando una onda agigantada. El fenómeno es sentido frecuentemente por un bote pequeño que está al lado del paso de un barco grande. El caso de los aviones supersónicos, se forma un gran aumento de presión, que puede romper vidrios y causar daños auditivos. El ángulo interno del cono es dado por 2α , donde

$$\text{sen}\alpha = R_0/D = v_s/v_f. \quad (87)$$

Tanto mayor la velocidad de la fuente, más alargado será el cono y mayor será el cúmulo de frentes de onda. La razón v_f/v_s (adimensionada) se llama número de Mach

$$\text{Mach} = v_f/v_s, \quad (88)$$

que indica cuántas veces por arriba de la velocidad de sonido está la fuente. Típicamente, un avión comercial tienen $\text{Mach} \approx 0,7$ a $0,8$ y los aviones más rápidos existentes tienen $\text{Mach} \approx 6$ a 8 .