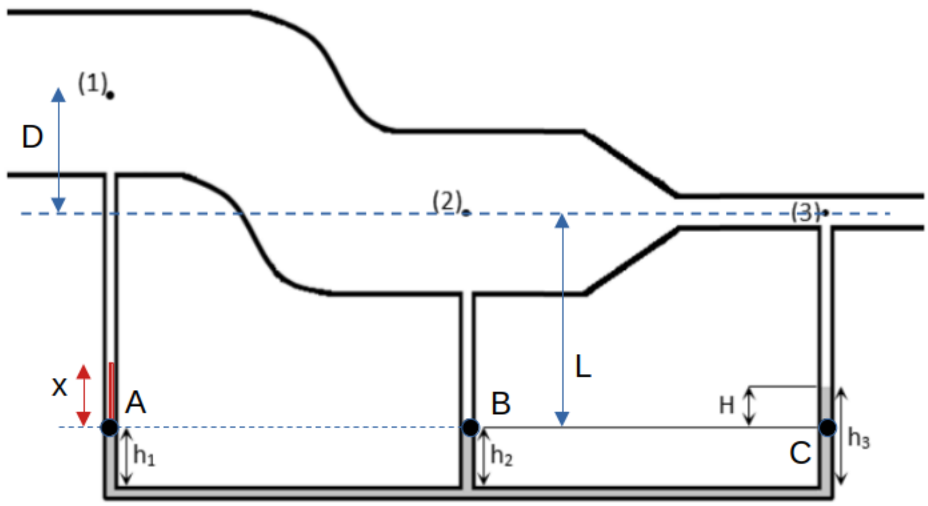
Solución - primer parcial - 28 de setiembre de 2022

Problema 1



Parte 1: Asumiendo que la altura del tubo izquierdo es una distancia x más alta que la altura del tubo central (ver figura) y aplicando hidrostática se tiene que,

$$P_A = P_1 + \rho g(D + L - x) + \rho' g x, \tag{1}$$
$$P_B = P_2 + \rho g L. \tag{2}$$

Por otro lado, por medio de la ecuación de Bernoulli entre los puntos 1 y 2, se obtiene

$$P_1 + \rho g D + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2, \tag{3}$$

además, de la ecuación de continuidad se deduce que $v_1 = v_2$, de donde

$$P_2 - P_1 = \rho g D. \tag{4}$$

Finalmente, como $P_A = P_B$,

$$P_1 + \rho g(D + L - x) + \rho' g x = P_2 + \rho g L, \tag{5}$$

de donde

$$P_2 - P_1 = \rho g D = \rho g(D - x) + \rho' g x, \tag{6}$$

lo que implica que $(\rho' - \rho) g x = 0{,}26 \rho g x = 0$, y por lo tanto $x = 0$.

Parte 2: La ecuación de Bernoulli entre los puntos 2 y 3 da lugar a

$$P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2. \tag{7}$$

Además, por continuidad se cumple que $A\ v_2 = a\ v_3$, de lo que resulta

$$P_2 - P_3 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \left(\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1 \right). \tag{8}$$

Utilizando hidrostática la presión en el punto C es

$$P_C = P_3 + \rho g(L - H) + \rho' g H. \tag{9}$$

Luego, como $P_B = P_C$ y usando las ecuaciones (2) y (9), se llega a que

$$P_2 - P_3 = (\rho' - \rho)gH, \tag{10}$$

Finalmente, insertando la ecuación (8) en la ecuación anterior, se obtiene

$$H = \frac{v_2^2}{0{,}52g}\left(\left(\frac{A}{a}\right)^2 - 1\right) \tag{11}$$

Parte 3: Debido a que las secciones son circulares, se puede escribir

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2 = \left(\frac{R}{r}\right)^4, \tag{12}$$

sustituyendo en la ecuación (11), y usando que $v_1 = v_2$, se deduce que

$$r = \left(1 + \frac{0{,}52gH}{v_1^2}\right)^{-1/4} R = 0{,}77\ R. \tag{13}$$

Por lo tanto, el radio se reduce en un 23 % aproximadamente.

Problema 2

Parte 1: Como el cuerpo está completamente sumergido, el empuje cumple que: $E = V_1\rho_f g$, de donde

$$V_1 = \frac{E}{\rho_f g} \approx 1{,}1 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^3. \tag{14}$$

Parte 2: Como el volumen sumergido ahora es $V_{\text{sum.}} = 7V_1$, el empuje es $E = 7V_1\rho_f g$. Además, como el cuerpo está en equilibrio

$$E = Mg \implies 7V_1\rho_f g = \rho_m V_1 g,$$

donde se usó que la masa del trozo de metal no varía y, por lo tanto, $M = V_1\rho_m$. Finalmente,

$$\rho_m = 7\rho_f = 7700\,\mathrm{kg\,m^{-3}}. \tag{15}$$

Parte 3: Como el cuerpo está apoyado en el fondo, en equilibrio, se cumple que

$$N + E = Mg \implies N = V_1(\rho_m - \rho_f)g = 6V_1\rho_f g = 6E \implies N = 720\,\mathrm{N}$$

Problema 3

Parte 1: Por tratarse de una cuerda con dos extremos fijos se genera un patrón de onda estacionaria, por lo tanto,

$$f_n = nf_1, \tag{16}$$

donde f_1 es la frecuencia fundamental. Por otro lado $f_{n+3} = (n+3)f_1$. Luego:

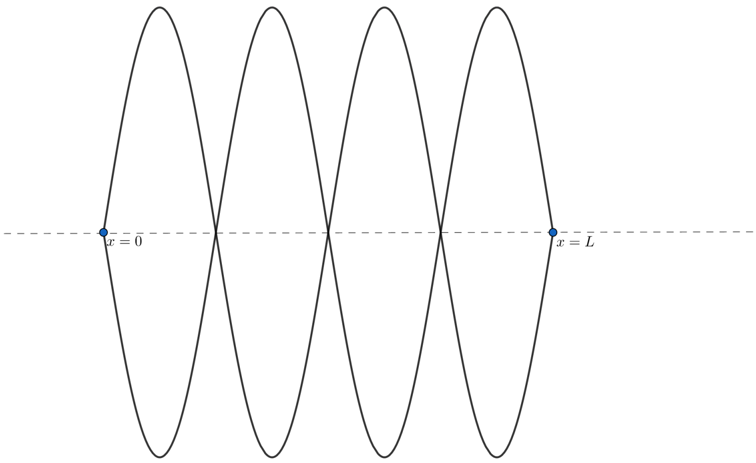
$$f_{n+3} - f_n = 3f_1 = 150\,\mathrm{Hz} \implies f_1 = 50\,\mathrm{Hz}. \tag{17}$$

Como $f_1 = \frac{v}{2L}$ se deduce que

$$v = 2Lf_1 = 30\,\mathrm{m\,s^{-1}}. \tag{18}$$

Además, debido a que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \implies \mu = \frac{T}{v^2}$ y como $T = Mg$, se llega a que

$$\mu = \frac{Mg}{v^2} \approx 5{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{kg\,m^{-1}} \tag{19}$$



Parte 2: Para $f_n = 200\,\text{Hz} = n\;50\,\text{Hz}$, de donde $n = 4$. Así, el patrón de nodos y antinodos corresponde al mostrado en la figura de arriba.

La onda cumple la ecuación $y(x,t) = A\;\text{sen}(kx)\cos(\omega t)$, con $k = \frac{4\pi}{L}$ y $\omega = 2\pi f_4$. Las condiciones de borde imponen que las posiciones $x = 0$ y $x = L$ correspondan a nodos. El primer caso se cumple trivialmente. En cuanto al segundo,

$$\text{sen}\left(\frac{4\pi}{L}L\right) = \text{sen}(4\pi) = 0, \tag{20}$$

verificándose la condición de borde.

Parte 3: Se tiene que

$$f_1 = \frac{v}{2L} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{2L} = f_1' = \frac{\sqrt{T'/\mu}}{2L'} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{T/\mu}}{2L}.$$

En conclusión, hay que modificar la longitud de la cuerda, de modo que

$$L' = \sqrt{5}L. \tag{21}$$

Problema 4

Parte 1: Cuando se pulsa sin apretar la cuerda vibra a una frecuencia $f_1 = 330\,\text{Hz}$, mientras que al apretarla la frecuencia es $f_{\text{SOL}} = 392\,\text{Hz}$. Como la velocidad de propagación de la onda es la misma en ambos casos se deduce que

$$v = 2Lf_1 = 2L_{\text{SOL}}f_{\text{SOL}}, \tag{22}$$

donde L_{SOL} refiere a la longitud a la que hay que apretar la cuerda (respecto del puente de la guitarra). De la ecuación (22) se desprende que

$$\frac{L_{\text{SOL}}}{L} = \frac{f_1}{f_{SOL}} = \frac{165}{196} \approx 0{,}84. \tag{23}$$

Parte 2: La frecuencia de la segunda guitarra es $f_1' = \frac{v'}{2L} = 316\,\text{Hz}$. Como el largo es idéntico a la cuerda de la parte anterior, se deriva que

$$L = \frac{v'}{2f_1'} = \frac{v}{2f_1} \implies \frac{\sqrt{T'/\mu}}{f_1'} = \frac{\sqrt{T/\mu}}{f_1}.$$

Como resultado,

$$\frac{T'}{T} = \left(\frac{f_1'}{f_1}\right)^2 \approx 0{,}917. \tag{24}$$

Parte 3: A efectos de estudiar la superposición de las ondas sonoras generadas por la vibración de las cuerdas, alcanza con analizar lo que ocurre en la posición $x = 0$:

$$\Delta p_1(t) = \Delta p_m \mathrm{sen}(\omega_1 t), \tag{25}$$

$$\Delta p_2(t) = \Delta p_m \mathrm{sen}(\omega_1' t). \tag{26}$$

Aplicando el principio de superposición se deduce que la onda resultante satisface:

$$\Delta p(t) = \Delta p_1(t) + \Delta p_2(t) = \Delta p_m(\mathrm{sen}(\omega_1 t) + \mathrm{sen}(\omega_1' t)), \tag{27}$$

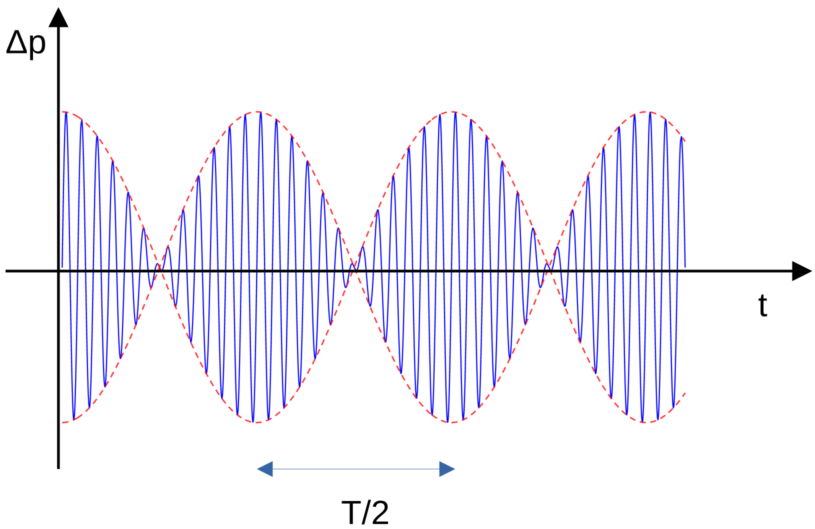
que puede simplificarse como

$$\Delta p(t) = 2\Delta p_m \ \mathrm{sen}\left(\frac{\omega_1 + \omega_1'}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_1'}{2} t\right). \tag{28}$$

En consecuencia, la superposición de los dos sonidos está caracterizada por dos frecuencias

$$F_1 = \frac{f_1 + f_1'}{2} = 323\,\mathrm{Hz} \quad \text{y} \quad F_2 = \frac{f_1 - f_1'}{2} = 7\,\mathrm{Hz}. \tag{29}$$

Gráficamente, se obtiene una curva como la de la siguiente figura:



La curva sólida azul corresponde a la frecuencia F_1. La envolvente, representada por la curva punteada roja, caracteriza a las pulsaciones. Como el periodo de las pulsaciones corresponde a la mitad del periodo de la envolvente (ver figura), se deduce que

$$T_{\text{puls.}} = T_{\text{env.}}/2 \implies f_{\text{puls.}} = 2f_{\text{env.}} = 2F_2. \tag{30}$$

En conclusión, $f_{\text{puls.}} = f_1 - f_1' = 14\,\mathrm{Hz}$.