Física 2 – Primer parcial
30 de abril de 2022

Justifique y explique claramente las hipótesis y aproximaciones que utilice.
Indique las unidades de las magnitudes en los resultados intermedios y finales. Identifique y revise su trabajo antes de entregar. El parcial dura 3 horas.

- Velocidad del sonido en el aire: $v_s = 343$ m s^{-1}
- Intensidad de referencia (umbral de la audición humana): $I_0 = 10^{-12} W/m^2$
- Presión atmosférica: $P_0 = 101325$ Pa

Ejercicio 1 (12 puntos)

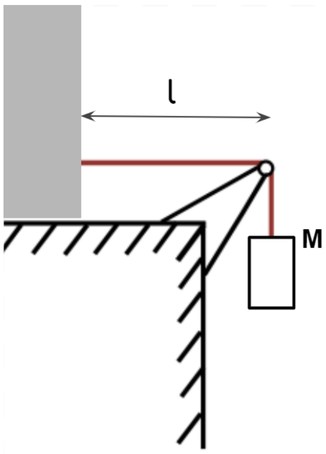

Figura 1

Se tiene una cuerda de masa $m_c = 3$ g y largo total $L = 80$ cm atada a un bloque de masa M, por medio de una polea de radio despreciable, y fija a una pared en su otro extremo, como muestra la Figura 1. La distancia desde la pared a la polea es $l = 60$ cm. Se observa que dicho sistema tiene frecuencias de resonancia en 300 Hz y 375 Hz, y ninguna otra entre estas dos.

a) Calcule la velocidad de onda en la cuerda y la masa del bloque M.

b) Calcule la frecuencia fundamental de este medio f_0.

c) Si ahora la masa del bloque es $M' = 4M$, considerando que la densidad lineal de la cuerda μ se mantiene constante ¿cuál variable del sistema modificaría para mantener el valor de f_0? y ¿cómo la modificaría?

Solución Ejercicio 1 (12 puntos)

a) Estamos trabajando en una cuerda con extremos fijos, por lo tanto para que se cumplan las condiciones de borde (nodos de desplazamiento en los extremos fijos) tenemos que:

$$f_n = \frac{vn}{2l},$$

con $n = 1, 2, 3...$ y v la velocidad de propagación de la onda en la cuerda.

Conocemos las frecuencias correspondientes a dos armónicos consecutivos, pero no sabemos a qué ármonicos pertenecen: $f_n = 300$ Hz y $f_{n+1} = 375$ Hz. Sí sabemos que la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda se mantiene constante, entonces

$$v = \frac{2lf_n}{n} = \frac{2lf_{n+1}}{n+1}.$$

Por lo tanto, $\dfrac{f_{n+1}}{f_n} = \dfrac{n+1}{n} = \dfrac{375 \text{ Hz}}{300 \text{ Hz}} = \frac{5}{4}$.

El armónico correspondiente a la frecuencia de 300 Hz es $n = 4$, y la longitud de onda $\lambda_4 = l/2 = 0,3$ m (usamos $\lambda_n = 2l/n$).

La velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es:

$$v = f_4\lambda_4 = 90 \text{ m/s}.$$

Por otro lado,

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{Mg}{\mu}}$$

y $\mu = \dfrac{m_c}{L} = 3,75 \times 10^{-3}$ Kg/m, por lo tanto

$$M = \frac{\mu v^2}{g} \approx 3,1 \text{ Kg}.$$

b) $f_n = nf_0$, con $n = 1, 2, 3...$, entonces $f_0 = f_4/4 = 75$ Hz.

c) La nueva frecuencia fundamental será $f_0' = \sqrt{\dfrac{M'g}{\mu'}}\dfrac{1}{2l'} = \sqrt{\dfrac{4Mg}{\mu'}}\dfrac{1}{2l'}$, mientras que $f_0 = \sqrt{\dfrac{Mg}{\mu}}\dfrac{1}{2l}$.

Si queremos que $f_0' = f_0$, manteniendo μ constante, es necesario que $\sqrt{\dfrac{4Mg}{\mu}}\dfrac{1}{2l'} = \sqrt{\dfrac{Mg}{\mu}}\dfrac{1}{2l}$.

Por lo tanto $l' = 2l$.

Ejercicio 2 (8 puntos)

La Figura 2 muestra un radar capaz de transmitir y recibir ondas de sonido. Sirve para medir la velocidad V de un objeto que se dirige hacia el mismo, analizando las ondas reflejadas.

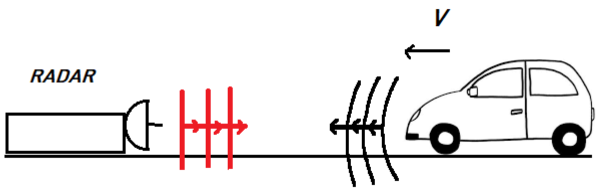

Figura 2

a) Considere que el radar emite una onda de frecuencia $f_0 = 300$ Hz. Un vehículo que se acerca al radar con velocidad V constante refleja la onda. Si la frecuencia recibida por el dispositivo es $f_r = 320$ Hz, calcule la velocidad V del vehículo.

Considere una ambulancia que se mueve en la dirección x con velocidad V constante como se muestra en la Figura 3. A una altura $h = 3{,}0$ m del suelo se encuentra un detector que mide el nivel de sonido de la onda proveniente de la ambulancia, considere que la misma se comporta como una fuente puntual de ondas esféricas. En un tiempo $t_0 = 0$ s la ambulancia está pasando por un punto que se encuentra a una distancia horizontal $x_0 = 50$ m del detector. En un tiempo posterior $t_1 = 5$ s el nivel de sonido detectado es de 97,3 dB.

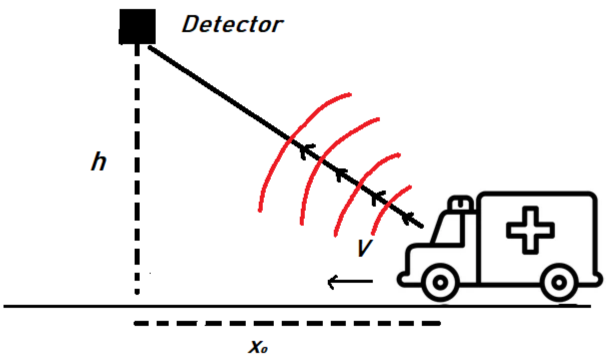

Figura 3

b) Sabiendo que la potencia media de la sirena es de 8,4 W determine la velocidad del vehículo.

Resolución: Ejercicio 2 (8 puntos)

a) El radar emite ondas con frecuencia f_0 mientras que el vehículo se mueve a velocidad V acercándose al radar. Debido al efecto Doppler la frecuencia de la onda que el vehículo recibe y luego refleja será:

$$f' = f_0 \frac{(v_s + V)}{v_s} \tag{1}$$

Estas ondas reflejadas por el vehículo llegan al receptor con frecuencia f_r, dónde debido al efecto Doppler considerando ahora el vehículo como el emisor (el cuál está en movimiento) acercándose al receptor tenemos:

$$f_r = f' \frac{v_s}{(v_s - V)} \tag{2}$$

Entonces utilizando (1) y (2):

$$f_r = f_0 \frac{(v_s + V)}{(v_s - V)} \tag{3}$$

Ahora despejamos la velocidad V de la ecuación (3):

$$\frac{f_r}{f_0} = \frac{v_s + V}{v_s - V} \rightarrow \frac{f_r(v_s - V)}{f_0} = v_s + V \rightarrow V = \frac{v_s \left(\frac{f_r}{f_0} - 1\right)}{\left(\frac{f_r}{f_0} + 1\right)} \tag{4}$$

Sustituyendo $f_r = 320$ Hz y $f_0 = 300$ Hz se tiene que:

$$V = \frac{343\ m/s \left(\frac{320\ Hz}{300\ hz} - 1\right)}{\left(\frac{320\ Hz}{300\ Hz} + 1\right)} = 11,1\ m/s \tag{5}$$

b) Sabiendo que para $t = 5$ s el nivel de sonido es de 97,3 dB podemos determinar la intensidad en el detector.

$$NS = 10\ log \left(\frac{I}{I_0}\right) \rightarrow I = I_0\ 10^{(NS/10)} \tag{6}$$

Sustituyendo $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\ W/m^2$ se tiene que $I = 1{,}0 \times 10^{-12}\ W/m^2\ 10^{(97{,}3/10)} = 5{,}4 \times 10^{-3} W/m^2$

Para ondas esféricas se cumple la siguiente relación:

$$I = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2} \tag{7}$$

Sabemos que luego de 5 segundos de haber comenzado el movimiento la intensidad es de $5{,}4 \times 10^{-3}$W$/m^2$ y la potencia media es 8,4 W. Con estos datos y usando la ecuación 7 podemos obtener r_f^2 y con ello x_f, siendo esta última la posición de la ambulancia a los 5 segundos

$$r_f^2 = \frac{\bar{P}}{4\pi I} = \frac{8{,}4\ W}{4\pi \times 5{,}4 \times 10^{-3}\ W/m^2} = 123{,}8\ m^2 \tag{8}$$

Aplicando el teorema de pitágoras al triángulo rectángulo de lados r, h y x_f:

$$x_f = \sqrt{r_f^2 - h^2} = \sqrt{123{,}8\ m^2 - (3{,}0\ m)^2} = 10{,}7\ m \tag{9}$$

Una vez obtenida x_f y debido a que la ambulancia se acerca al detector con velocidad constante V tenemos que: $x_f - x_0 = -Vt, \quad t = 5{,}0\ s, \quad x_0 = 50\ m.$

Entonces V se halla de la siguiente forma:

$$V = (x_0 - x_f)/t = \frac{50\ m - 10{,}7\ m}{5,0\ s} = 7{,}9\ m/s \tag{10}$$

Ejercicio 3 (20 puntos)

Del fondo de un tanque que contiene agua, abierto a la atmósfera, sale un caño de sección A_1 que se bifurca en dos caños que descargan a la atmósfera, como se observa en la Figura 4 (las figuras no están a escala). Los caños de descarga se encuentran separados por una altura $H = 3h$. De estos caños, el superior tiene una sección $A_2 = A_1/4$, mientras que el inferior tiene una sección $A_3 = 2A_1/3$. La sección del tanque puede considerarse mucho mayor que A_1. Para que la altura h del agua dentro del tanque se mantenga constante, se está continuamente volcando agua dentro del tanque a una tasa constante correspondiente a un caudal Q (flujo volumétrico) a determinar. Se considerarán como datos conocidos del problema A_1, h, P_0, la densidad del agua ρ y la aceleración de la gravedad g.

a) Determine, en función de los datos conocidos, el caudal Q.

b) Determine la diferencia de presión $\Delta P = P_1 - P_0$, donde P_1 es la presión en el punto 1 de la figura, en función de los datos conocidos.

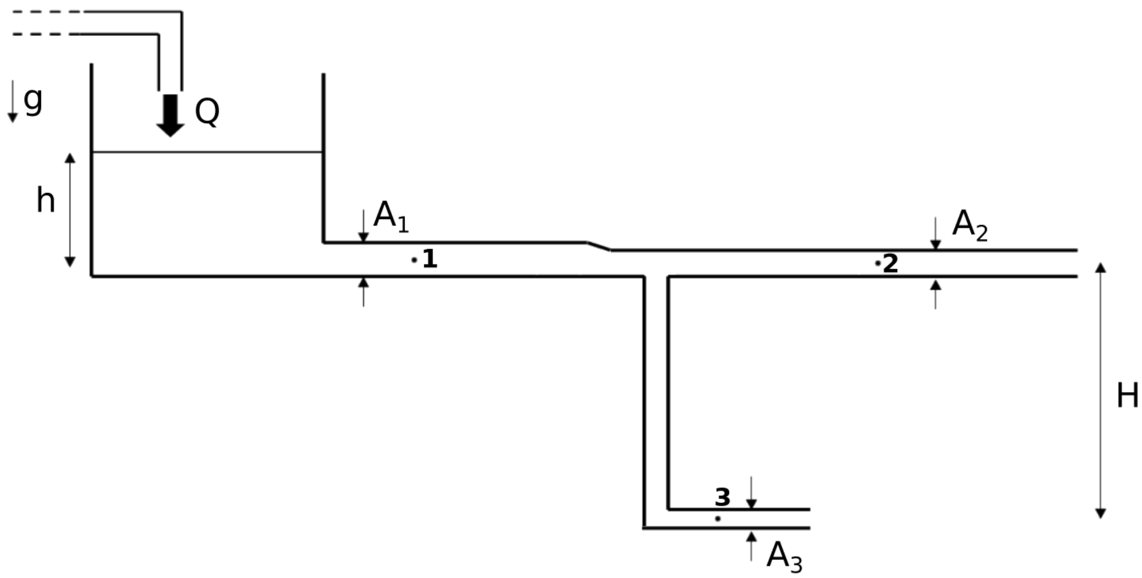

Figura 4

Se conecta un manómetro, que es un tubo en forma de U con mercurio, de manera que la rama izquierda del tubo en U queda conectada al caño de sección A_1 por debajo del punto 1 y la rama derecha del tubo en U queda conectada al tubo de sección A_2 por debajo del punto 2, como se observa en la Figura 5.

c) Indique, justificando claramente, en qué rama del tubo en U (derecha o izquierda) la columna de mercurio tiene una altura mayor.

d) Determine la diferencia de altura x del mercurio entre la rama derecha y la rama izquierda del tubo en U. Puede considerarse la densidad del mercurio ρ_{Hg} como un dato conocido.

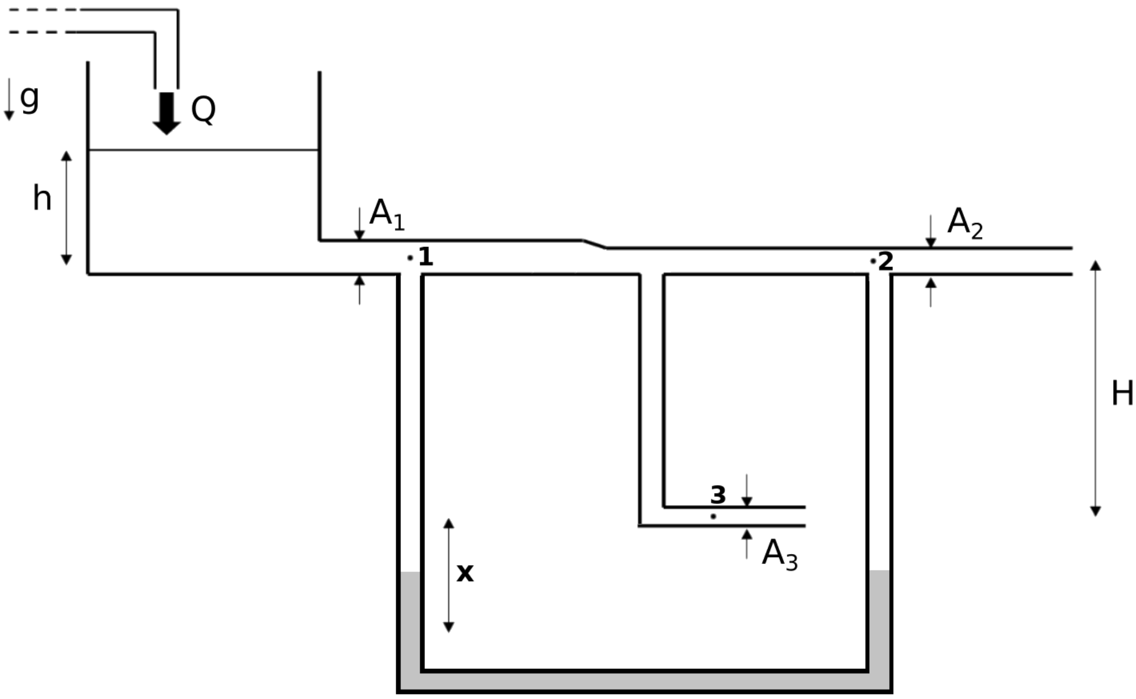

Figura 5

Resolución: Ejercicio 3 (20 puntos)

a) En este caso para determinar el caudal Q primero aplicamos Bernoulli entre el punto 0 (punto ubicado en la superficie del agua contenida en el tanque) y 2, y entre 0 y 3 para determinar las velocidades de salida del fluido. Como la sección transversal del tanque de agua es mucho mayor que A_1 podemos considerar que la velocidad en el punto 0 $v_0 \approx 0$.

Aplicamos Bernoulli entre 0 y 2

$$P_0 + \rho g h = P_0 + \rho v_2^2/2 \tag{11}$$

De la ecuación (12) podemos despejar v_2:

$$2\rho g h = \rho v_2^2 \rightarrow v_2 = \sqrt{2gh} \tag{12}$$

Aplicamos Bernoulli entre 0 y 3

$$P_0 + \rho g h = P_0 - \rho g H + \rho v_3^2/2 \tag{13}$$

De la ecuación (13) podemos despejar v_3:

$$\rho g h = -\rho g H + \rho v_3^2/2 \tag{14}$$

Sabiendo que $H = 3h$ tenemos que:

$$\rho g h = -3\rho g h + \rho v_3^2/2 \rightarrow 4gh = v_3^2/2 \rightarrow v_3 = 2\sqrt{2gh} \tag{15}$$

Por conservación del flujo volumétrico $Q = Q_2 + Q_3$, siendo $Q_2 = A_2 v_2$ y $Q_3 = A_3 v_3$.

$$Q = A_2 v_2 + A_3 v_3 = \frac{A_1\sqrt{2gh}}{4} + \frac{4A_1\sqrt{2gh}}{3} \tag{16}$$

$$Q = A_1\sqrt{2gh}(1/4 + 4/3) = \frac{19}{12} A_1\sqrt{2gh} \tag{17}$$

b) Como conocemos el flujo volumétrico Q, podemos determinar la velocidad en el punto 1 en términos de los datos conocidos. Para determinar P_1 aplicamos Bernoulli entre 0 y 1.

$$P_0 + \rho g h = P_1 + \rho v_1^2/2 \tag{18}$$

Aplicamos conservación del flujo volumétrico.

$$Q = A_1 v_1 = \frac{19}{12} A_1 \sqrt{2gh} \rightarrow v_1 = \frac{19}{12}\sqrt{2gh} \tag{19}$$

Sustituyendo v_1 en la ecuación (19) podemos despejar P_1.

$$P_1 = P_0 + \rho g h - \rho \left(\frac{19}{12}\right)^2 gh = P_0 + \rho g h \left[1 - \left(\frac{19}{12}\right)^2\right] = P_0 + \rho g h \left[1 - \frac{361}{144}\right] \tag{20}$$

Por lo tanto $\Delta P = P_1 - P_0 = -\frac{217}{144}\rho g h$.

c) En el punto 1 la presión es menor que en el punto 2 que está bajo la presión atmosférica por lo tanto la rama izquierda es la que va a tener mayor altura.

d) Tomando en cuenta la parte anterior la disposicion del fluido en el tubo en U es la siguiente.

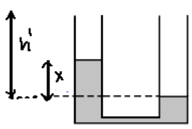

Figura 6: Disposición del fluido

$$P_1 + \rho g(h' - x) + \rho_{\mathrm{Hg}}\, gx = P_2 + \rho g h' \tag{21}$$

Conociendo P_1 de la parte b) y que $P_2 = P_0$ sustituimos en (21) y se obtiene lo siguiente:

$$P_2 - P_1 = gx(\rho_{\mathrm{Hg}} - \rho) \rightarrow P_0 - P_0 + \frac{217}{144}\rho g h = gx(\rho_{\mathrm{Hg}} - \rho) \tag{22}$$

Por lo tanto tenemos que

$$x = \frac{217}{144}\frac{\rho h}{(\rho_{\mathrm{Hg}} - \rho)}$$