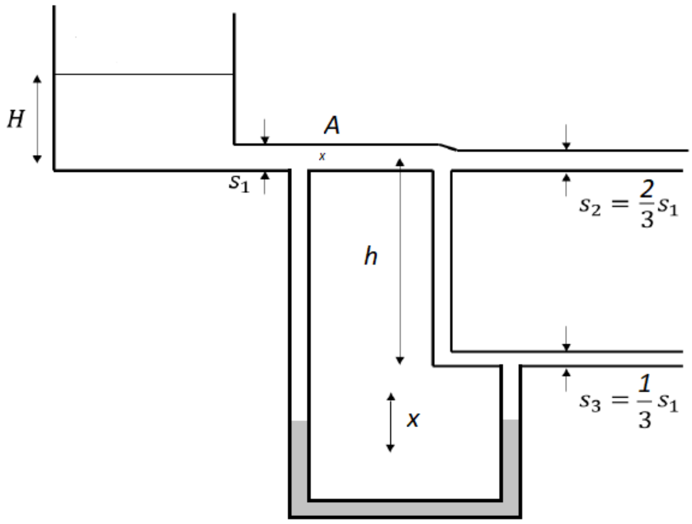
Fisica 2 – Primer Parcial
1ro de Octubre de 2021

Ejercicio 1 [20 pts.]

La figura muestra un sistema compuesto por un gran tanque abierto a la atmósfera y dos caños de descarga también abiertos a la atmósfera. El nivel de agua en el tanque es H conocido y se supone constante. La diferencia de altura entre los caños es $h = \frac{5}{4}H$. El caño de sección S_1 y el caño de sección S_3 están conectados por un tubo con una cierta cantidad de mercurio, como muestra la figura.



a) Halle la velocidad del flujo v_A en el punto A.

b) Halle la diferencia de altura x, medida entre el nivel del mercurio de un lado y el otro, e indique en que dirección se inclina el mercurio.

Solución:

a) Planteando Bernoulli entre un punto de la superficie y la salida del tubo de sección S_2, tenemos que

$$P_0 + \rho g H + \frac{\rho v_0^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \tag{1}$$

Planteando Bernoulli entre los puntos de la superficie y salida a través del caño de sección S_3 obtenemos:

$$P_0 + \rho g H + \frac{\rho v_0^2}{2} = P_0 - \rho g h + \frac{\rho v_3^2}{2}. \tag{2}$$

De esta forma vemos que:

$$v_3 = \sqrt{2gh + v_2^2}. \tag{3}$$

A su vez, como la situación es estacionaria, por continuidad es:

$$v_0 S_0 = v_A S_1 = v_2 S_2 + v_3 S_3, \tag{4}$$

siendo S_0 el área de la superficie abierta. En vistas de lo anterior, en todos los casos podemos despreciar los términos proporcionales a v_0^2 en la ecuación de Bernoulli frente a las otras velocidades involucradas.

Podemos combinar esto con lo planteado previamente con (1) para obtener que:

$$P_0 + \rho g H = P_0 + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

donde hemos despreciado el término proporcional a v_0^2 como anticipamos.

Despejando es:

$$v_2 = \sqrt{2gH}. \tag{5}$$

Retomando la relación dada por la ecuación de continuidad es

$$v_A S_1 = v_2 S_2 + v_3 S_3 = \frac{2S_1}{3}\sqrt{2gH} + \frac{S_1}{3}\sqrt{2gh + 2gH}.$$

Operando y utilizando que $h = \frac{5}{4}H$ es:

$$v_A = \frac{\sqrt{2gH}}{3}\left(2 + \sqrt{\frac{9}{4}}\right) = \frac{7\sqrt{2gH}}{6}.$$

b) La presión en A es menor que en el tubo de sección S_3 (a la misma altura que la salida a la atmósfera). Esto se visualiza notando que en el tubo de sección S_3, en la parte cuya altura está a la altura de la salida, la presión es P_0. Por otro lado, dado que A está a la misma altura que la salida del tubo de sección S_2 y además es $v_A > v_2$. Luego de una rápida mirada a la ecuación de Bernoulli aplicada entre A y la salida del tubo de sección S_2:

$$P_A + \frac{\rho v_A^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_2^2}{2},$$

esto implica que

$$P_0 - P_A = \frac{\rho v_A^2}{2} - \frac{\rho v_2^2}{2} = \rho g H\left(\frac{49}{36} - 1\right) = \frac{13}{36}\rho g H. \tag{6}$$

A lo largo del tubo vertical que se conecta a A, al descender hasta la altura de la salida del tubo horizontal de sección S_3, la presión aumenta hasta $P_{A,3} = P_A + \rho g h$, que combinando con (6) es:

$$P_{A,3} = P_0 + \left(\frac{5}{4} - \frac{13}{36}\right)\rho g H = P_0 + \frac{8}{9}\rho g H \tag{7}$$

Esto implica que la columna de mercurio es más alta en la rama que se une al tubo horizontal de sección S_3. Planteando que la presión donde comienza el mercurio en el tubo vertical que se conecta al punto A es igual a la presión dentro del mercurio a la misma altura en el tubo que se conecta al tubo horizontal de sección S_3 es:

$$P_{A,3} + \rho g(l + x) = P_0 + \rho g l + \rho_{Hg} g x,$$

siendo l la distancia entre el tubo horizontal de sección S_3 y el punto en que comienza el mercurio en el tubo vertical que se conecta a éste. De aquí concluimos, combinando con (7), que:

$$x = \frac{8}{9}\frac{\rho H}{\rho_{Hg} - \rho}$$

Ejercicio 2 [12 pts.]

Se genera una onda transversal sinusoidal $y_1(x,t)$, que viaja en el sentido positivo de las x, en una cuerda de longitud infinita. El desplazamiento transversal de la cuerda para la posición $x = 0$ cumple que $y_1(x = 0,t) = Asen(\omega t)$, con $A = 5\,cm$ y $\omega = 40\,rad/s$. La cuerda se encuentra sometida a una tensión $F = 80\,N$ y tiene una densidad lineal de masa $\mu = 50\,g/m$.

a) Determine número de onda y la expresión $y_1(x,t)$.

Se genera otra onda transversal en la misma cuerda, con igual amplitud y frecuencia que la anterior, pero que viaja en sentido opuesto. Su función de onda es de la forma $y_2(x,t) = Asen(kx + \omega t + \pi/2)$, donde A es la amplitud, k su número de onda y ω su frecuencia angular. La onda resultante es una onda estacionaria (las condiciones de borde pueden cambiar,).

b) Halle la onda resultante y justifique por qué se trata de una onda estacionaria.

c) Determine las posiciones $x > 0$ de los nodos.

Solución:

a) Dado que conocemos la tensión y la densidad de masa, la velocidad de la onda en la cuerda es $v = \sqrt{F/\mu} = 40\,m/s$. El número de onda será entonces $k = \omega/v = 1\,m^{-1}$.

Con los datos disponibles será

$$y_1(x,t) = Asen(\omega t - kx),$$

dado que de esta forma es $y_1(0,t) = Asen(\omega t)$ cumpliendo así la condición de borde.

b) Debemos realizar la superposición de ondas $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$. Para ello podemos reexpresar $y_2(x,t)$ como:

$$y_2(x,t) = Acos(\omega t + kx).$$

Notando que

$$cos(\omega t + kx) = cos(\omega t)cos(kx) - sen(\omega t)sen(kx)$$

y

$$sen(\omega t - kx) = sen(\omega t)cos(kx) - cos(\omega t)sen(kx)$$

es:

$$y(x,t) = A\big\{cos(\omega t) + sen(\omega t)\big\}\big[cos(kx) - sen(kx)\big]. \tag{8}$$

Esta es una onda estacionaria dado que consiste en la superposición de dos ondas de igual amplitud, frecuencia y numero de ondas propagandose en direcciones opuestas.

c) Las posiciones x_{nod} de los nodos de la ecuación (8) corresponden a aquellos en que $y(x_{nod},t) = 0$. Estos se dan cuando

$$cos(kx_{nod}) = sen(kx_{nod}),$$

o, equivalentemente, cuando

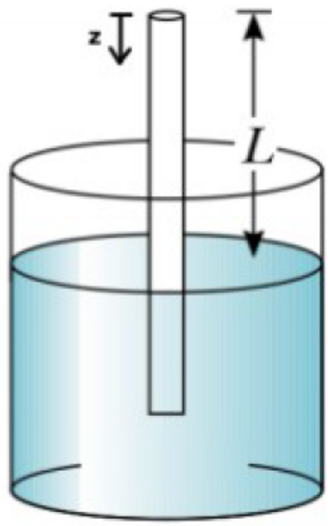
$$tan(kx_{nod}) = 1.$$

La solución a esta ecuación es

$$x_{nod} = \left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)m, \qquad \text{con } n \in \{0,1,2,\dots\}.$$

Ejercicio 3 [8 pts.]

Un tubo abierto en los dos extremos se sumerge parcialmente en agua, como se muestra en la figura. El extremo superior del tubo se coloca cerca de una fuente de sonido de frecuencia 686 Hz. El largo L de la columna de aire dentro del tubo se ajusta moviendo verticalmente el tubo para que se generen ondas estacionarias.



a) Indique y explique las condiciones de borde que deben cumplir las ondas de sobrepresión y de desplazamiento en las posiciones $z = 0$ y $z = L$ dentro del tubo.

b) Determine los dos valores de L más pequeños para los que se generaran ondas estacionarias dentro del tubo.

c) Bosqueje, para el L más pequeño, la sobrepresión en función de la posición z dentro del tubo para un tiempo fijo cualquiera.

Solución:

a) La sobrepresión en un borde abierto debe ser cero ya que la presión debe igualarse a la atmosférica. En consecuencia, el desplazamiento del aire debe ser un máximo o mínimo en el borde abierto ya que la sobrepresión es proporcional a la variación de la densidad con la posición y ésta, a su vez, es proporcional a la variación del desplazamiento del aire. Es decir:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{P}\Big|_{z=0} &= 0, \\ \frac{\partial s}{\partial z}\Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Razonando similarmente, en la parte del tubo en contacto con el agua ($z = L$), en una primera aproximación podemos considerar al agua como borde rígido. En los bordes rígidos, el desplzamiento debe ser siempre nulo dado que no puede atravesarse el borde ni dejar vacío el espacio. Dada la relación recién discutida, esto implica que la presión debe ser un máximo o mínimo en los bordes rígidos. Es decir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta\mathcal{P}}{\partial z}\Big|_{z=L} &= 0, \\ s\Big|_{z=0} &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

b)

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = 0{,}5\ m$$

$$\Rightarrow L_1 = \frac{\lambda}{4} = 0{,}125\ m$$

$$\Rightarrow L_2 = \frac{3\lambda}{4} = 0{,}375\ m$$

c) La sobrepresión, dado por las condiciones de borde discutidas en la parte *a*) implican que ésta será nula en $z = 0$ y máxima o mínima en $z = L$. Dado que usamos el menor L, la sobrepresión tendrá la siguiente forma.