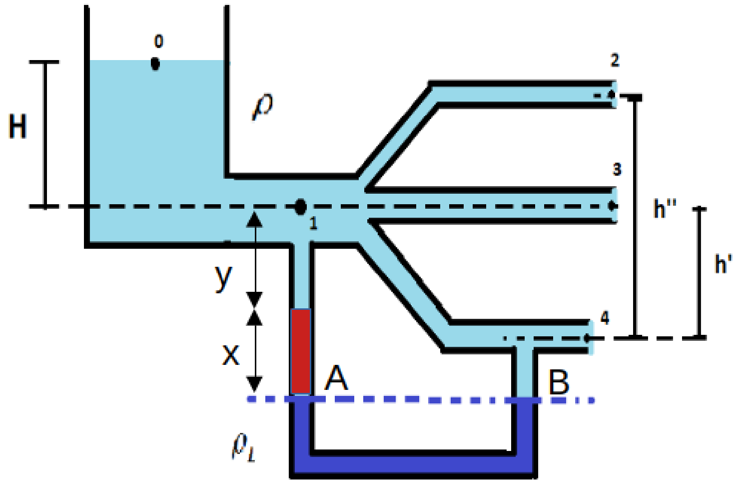
Problema 1:



a) Aplicando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 0 y 3 tenemos

$$P_0+\rho g H=P_0+\frac{1}{2}\rho v_3^2, \quad \text{de donde} \quad v_3=\sqrt{2gH}.$$

Usando la ecuación de Bernoulli entre los puntos 0 y 2 llegamos a

$$P_0+\rho g H=P_0+\frac{1}{2}\rho v_2^2+\rho g(h''-h'), \quad \text{de donde} \quad v_2=\sqrt{\frac{gH}{2}}$$

Por otra parte se sabe que $v_4=v_2/2=\sqrt{\frac{gH}{8}}$.

Además, usando la ecuación de continuidad tenemos

$$S_1 v_1=S_2 v_2+S_3 v_3+S_4 v_4, \quad \text{de donde}$$

$$v_1=\left(\frac{S_2}{S_1}+\frac{1}{2}\frac{S_4}{S_1}\right)v_2+\frac{S_3}{S_1}v_3=\frac{2}{3}(v_2+v_3)=\sqrt{2gH}.$$

b) Aplicando Bernoulli entre los puntos 1 y 3, tenemos

$$P_1+\frac{1}{2}\rho v_1^2=P_0+\frac{1}{2}\rho v_3^2, \quad \text{y puesto que} \quad v_1=v_3 \quad \text{, entonces} \quad P_1=P_{0.}$$

Para hallar la presión en el punto 4, alcanza con utilizar la ecuación de Bernoulli entre el punto 0 y el punto 4:

$P_0+\rho g(H+h')=P_4+\frac{1}{2}\rho v_4^2$ Usando el resultado de la parte anterior para v_4 y que $h'=\frac{3H}{4}$ obtenemos que

$$P_4=P_0+\frac{27}{16}\rho g H.$$

c) Asumiremos que la columna de la izquierda se encuentra a una altura mayor (ver figura), en caso de que esto no sea así al final de la resolución simplemente nos encontraremos con una altura negativa. Por otra parte, las presiones en A y en B deben ser iguales. Usando hidrostática tenemos que:

$$P_A=P_1+\rho g y+\rho_L g x, \qquad P_B=P_4+\rho g(y+x-h').$$

De $P_A=P_B$, se desprende que

$$P_1+\rho g y+\rho_L g x=P_4+\rho g(y+x-h'),$$

sustituyendo con los valores hallados anteriormente y usando que h’=3H/4 y $\rho_L=3\rho$ obtenemos

$$x=\frac{15H}{32}.$$

Problema 2:

Primero convirtiendo al SI, tenemos

$$v_a=65\,km/h=18{,}1\,m/s$$

$$v_b=80\,km/h=22{,}2\,m/s$$

Tomando la velocidad de la onda de sonido en el aire es

$$v_{aire}=343\,m/s$$

A) Caso: fuente en movimiento hacia el observador en resposo.

$$f'=f\frac{v_{aire}}{v_{aire}-v_a}=500\frac{343}{343-18{,}1}\,Hz=527{,}85\,Hz$$

B) Caso: fuente en movimiento hacia el observador y observador acercándose a la fuente.

$$f'=f\frac{v+v_b}{v-v_a}=500\frac{343+22{,}2}{343-18{,}1}\,Hz=562\,Hz$$

C) La onda sonora es emitida por una fuente estática y el receptor está en movimiento.
I) La onda que llega al auto que se aleja tiene frecuencia f ‘

$$f' = f\,\frac{v_{aire} - v_2}{v_{aire}}$$

Ahora la fuente es el auto en movimiento y el observador está en reposo. La onda recibida tiene una frecuencia f’’

$$f'' = f'\,\frac{v_{aire}}{v_{aire} + v_2} = f\,\frac{v_{aire} - v_2}{v_{aire} + v_2}$$

II) Despejando v_2 de la ecuación de la parte I, tenemos:

$$\frac{v_{aire} - v_2}{v_{aire} + v_2} = \frac{f''}{f} \Rightarrow v_2 = v_{aire}\,\frac{1 - \frac{f''}{f}}{1 + \frac{f''}{f}}$$

$$v_2 = v_{aire}\,\frac{f - f''}{f + f''} = 14{,}29\,m/s = 51{,}45\,km/h$$

Problema 3:

1) $p_A = 100\,\mathrm{kPa}$ $\qquad T_A = (273 + 27)\mathrm{K} = 300\,\mathrm{K}$

$$V_A = Sh = (100\,cm^2)\,10\,cm = 1000\,cm^2 = 0{,}001\,m^3$$

I) $V_B = V_A = 1000\,\mathrm{cm}^3$

$T_B = 600\,\mathrm{K}$

$$\frac{p_B}{T_B} = \frac{p_A}{T_A} \qquad \Rightarrow \qquad p_B = \frac{600\,\mathrm{K}}{300\,\mathrm{K}}100\,\mathrm{kPa} = 200\,\mathrm{kPa}$$

II) $T_B = T_C = 600\,K$

$p_C = p_A = 100\,\mathrm{kPa}$

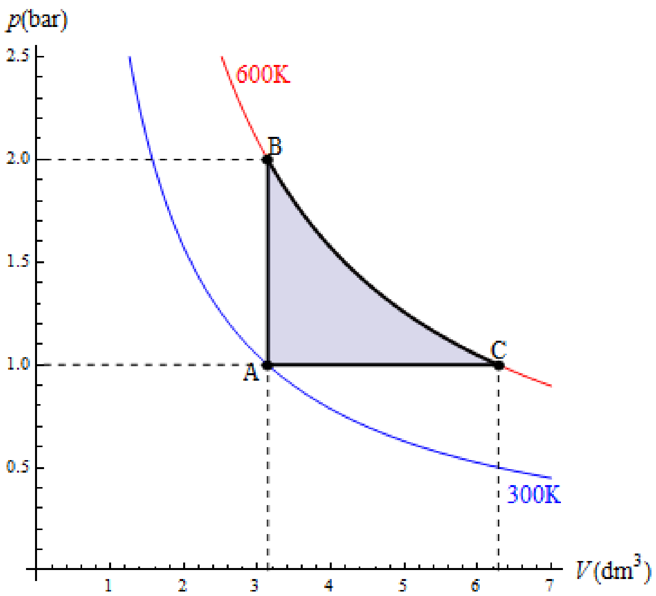
$$p_C V_C = p_B V_B \qquad \Rightarrow \qquad V_C = \frac{200\,\mathrm{kPa}}{100\,\mathrm{kPa}}1000\,\mathrm{cm}^3 = 2000\,\mathrm{cm}^3$$

III) $p_D = p_C = p_A = 100\,\mathrm{kPa}$ $\qquad T_D = T_A = 300\,\mathrm{K}$

$$\frac{V_D}{T_D} = \frac{V_C}{T_C} \qquad \Rightarrow \qquad V_D = \frac{300\,\mathrm{K}}{600\,\mathrm{K}}2000\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3$$

Al ser la presión y la temperatura finales iguales a las de partida también lo es el volumen. El estado D es el mismo que el estado A y el proceso es por tanto un ciclo.

Estado	p (kPa)	T(K)	V(cm^3)
A	100	300	1000
B	200	600	1000
C	100	600	2000



2) A-B) Al permanecer constante el volumen, no se realiza trabajo sobre el gas

$$W^{A\to B} = 0$$

B-C)

$$W^{B\to C} = -\int_B^C p\,\mathrm{d}V = -p_B V_B \int_{V_B}^{V_C} \frac{\mathrm{d}V}{V} = -p_B V_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right)$$

En nuestro caso

$$W^{B\to C} = -(2\times 10^5\mathrm{Pa})(0.001\,\mathrm{m}^3)\ln(2) = -139\,\mathrm{J}$$

C-A)

$$W^{C\to A} = -\int_C^A p\,\mathrm{d}V = -p_A \int_{V_C}^{V_A} = p_A(V_A - V_C) = 10^5(0.002 - 0.001)\,\mathrm{J} = +100\,\mathrm{J}$$

TOTAL:

$$W = -\oint p\,\mathrm{d}V = W^{A\to B} + W^{B\to C} + W^{C\to A} = (0 - 139 + 100)\,\mathrm{J} = -39\,\mathrm{J}$$

El signo del trabajo nos dice que en realidad es el gas el que realiza el trabajo sobre el ambiente.

3)

$$c_v = \frac{5}{2}R = 20.8\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}\cdot\mathrm{mol}}$$

$$\Delta U = nc_v\,\Delta T \qquad\qquad Q = \Delta U - W$$

A-B) Al calentarse el gas aumenta su energía interna

$$\Delta U^{A\to B} = nc_v(T_B - T_A) = \frac{5}{2}(p_B - p_A)V_A = +250\,J$$

Puesto que en este proceso el trabajo es nulo, este aumento en la energía procede exclusivamente del calor

$$Q^{A\to B} = \Delta U^{A\to B} - \overbrace{W^{A\to B}}^{=0} = +250\,\mathrm{J}$$

B-C) Expansión isoterma

$$\Delta U = nc_v\,\Delta T = 0$$

$$Q^{B\to C} = \overbrace{\Delta U^{B\to C}}^{=0} - W^{B\to C} = p_B V_B \ln\left(\frac{V_C}{V_B}\right) = +139\,\mathrm{J}$$

C-A)

$$\Delta U^{C\to A} = nc_v\,\Delta T = nc_v(T_A - T_B) = -250\,\mathrm{J}$$

$$Q^{C\to A} = \Delta U - W^{C\to A} = -250\,\mathrm{J} - 100\,\mathrm{J} = -350\,\mathrm{J}$$

TOTAL:

$$\Delta U = \Delta U^{A\to B} + \Delta U^{B\to C} + \Delta U^{C\to A} = 250\,\mathrm{J} + 0\,\mathrm{J} - 250\,\mathrm{J} = 0\,\mathrm{J}$$

que es nula, como corresponde a que el proceso es cíclico y la energía es una función de estado.

Proceso	Q(J)	W(J)	ΔU(J)
A → B	250	0	250
B → C	139	-139	0
C→ A	-350	100	-250

4)

$$\eta = \frac{W_{\mathrm{net,out}}}{Q_{\mathrm{in}}}$$

En este caso el calor que entra es el de los pasos A → B y B → C, pero no en el C → A, en que sale. Por ello, el rendimiento vale

$$\eta = \frac{39\,J}{(250+139)\,J} = 0.0991$$

5) El rendimiento de una máquina de Carnot reversible que operara entre las dos temperaturas extremas sería

$$\eta^{rev} = 1 - \frac{300}{600} = 0.5 \quad ,$$

de donde $\eta < \eta^{rev}$. Por lo tanto, la máquina térmica descrita por el ciclo, donde además la fuente de alta se encuentra a la temperatura máxima del ciclo y la de baja se encuentra a la temperatura mínima del ciclo, puede implementarse.

6) Por tratarse de un proceso cíclico, la entropía del gas no cambia en el proceso.

$$\Delta S_{\mathbf{sis}} = 0$$

Variación de entropía de la fuente de alta:

$$\Delta S_C = -\frac{Q_{\mathrm{in}}}{T_C} = -\frac{389\,\mathrm{J}}{600\,\mathrm{K}} = -0.646\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

Variación de entropía de la fuente de baja:

$$\Delta S_F = \frac{Q_{\mathrm{out}}}{T_F} = -\frac{350\,\mathrm{J}}{300\,\mathrm{K}} = +1.16\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

La variación total de la entropía del entorno es suma de estas dos

$$\Delta S_{\mathrm{amb}} = \Delta S_C + \Delta S_F + 0.52\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$

La variación de entropía del universo es la suma de la del sistema y la del entorno

$$\Delta S = \Delta S_{\mathrm{sis}} + \Delta S_{\mathrm{amb}} = +0.52\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$$