Física 2 – EXAMEN
28 de julio de 2022

Justifique y explique claramente las hipótesis y aproximaciones que utilice.
Indique las unidades de las magnitudes en los resultados intermedios y finales. Identifique y revise su trabajo antes de entregar. Para aprobar el examen se necesitan 60 puntos o más.

Ejercicio 1 - Ondas (20 puntos)

Una cuerda con extremos fijos, de densidad lineal de masa $\mu = 0{,}05$ g/cm, se coloca en reposo sobre un eje x, con uno de sus extremos en la posición $x = -L$ y el otro extremo en $x = L$, donde $L = 3$ cm. Se genera una onda estacionaria en la cuerda, de forma tal que esta resuena en la tercera frecuencia más baja permitida. El antinodo más próximo al extremo izquierdo de la cuerda se encuentra en la posición x_a. En el tiempo $t_0 = 0$ s se observa que el desplazamiento de la cuerda en la posición x_a alcanza su mínimo valor, siendo este $y(x = x_a, t = t_0) = -2$ cm. El desplazamiento en la posición x_a alcanza por primera vez su máximo valor en el tiempo $t_1 = 1{,}2$ ms, para el cual el desplazamiento vale $y(x = x_a, t = t_1) = 2$ cm.

a) Determine la frecuencia de la onda, la tensión a la cual está sujeta la cuerda y el valor de x_a.

b) Escriba una expresión $y(x, t)$ que describa esta onda estacionaria. Indique las condiciones de borde y verifique que se cumplan.

c) Grafique la forma de la cuerda $y(x, t)$ para $t = t_1/2$ y para $t = 2t_1$. ¿Estas gráficas son válidas para otros tiempos? Si es así, indique para qué tiempos.

Ejercicio 2 - Fluidos (30 puntos)

Considere un tanque abierto a la atmósfera que contiene un fluido de densidad ρ, de un lado de este salen dos caños que se encuentran a alturas h y H respectivamente del nivel de agua del tanque (ver Figura 1). El caño inferior desciende una distancia L desconocida. Luego ambos caños se unen en una bifurcación que descarga a la atmósfera con velocidad v, el caño de descarga se encuentra una altura D, a determinar, por debajo del nivel de agua del tanque. Un manómetro de un fluido de densidad $\rho' = 2\rho$ es conectado entre los puntos 4 y 5 que aparecen en la figura y muestra una diferencia de nivel d hacia la derecha. Considere que todos los caños del problema tienen sección S desconocida y que la sección del tanque es mucho mayor que S. La atmósfera se encuentra a una presión P_0 y todo el sistema está en un campo de gravedad g.

Se consideran como datos: h, H, d, v, ρ, g y P_0. Exprese los resultados en función de ellos.

a) Calcule la altura D.

b) Calcule las velocidades v_2 y v_3 en los puntos 2 y 3 marcados en la Figura 1.

c) Calcule las presiones P_2 y P_3 en los puntos 2 y 3 marcados en la Figura 1.

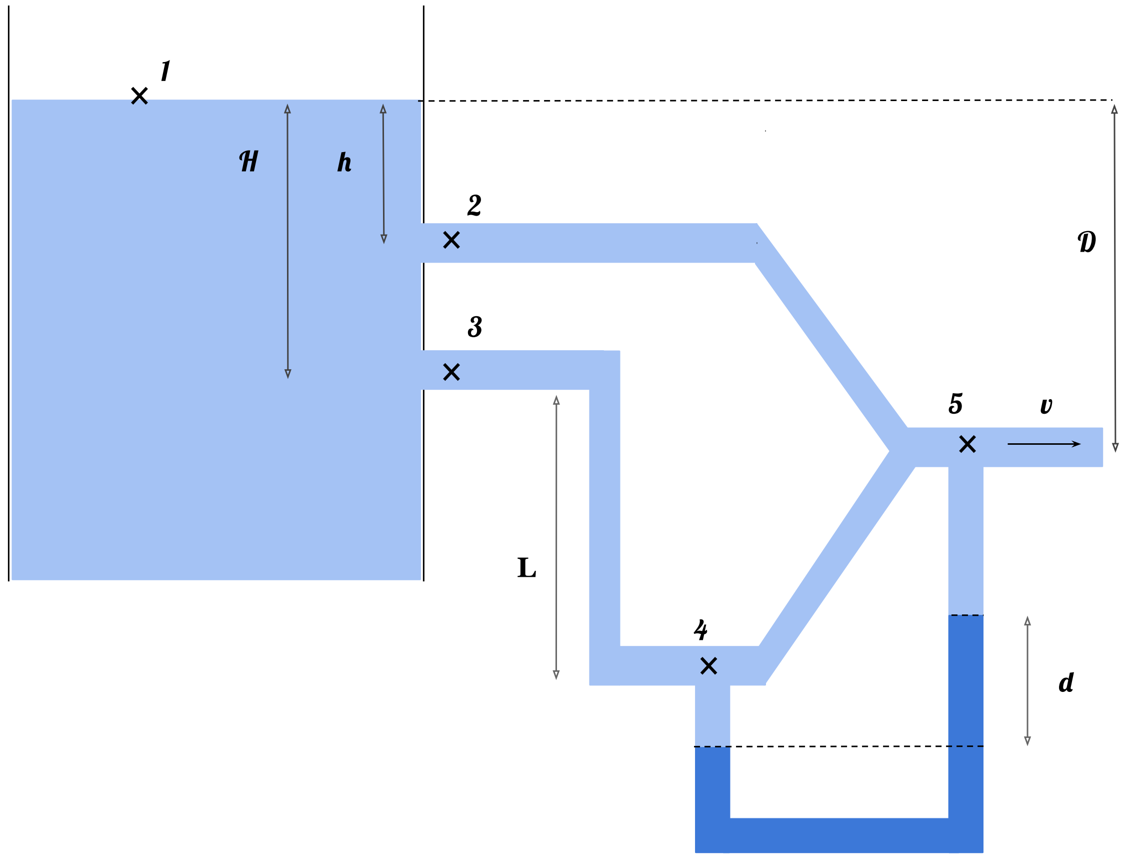


Figura 1

Ejercicio 3 - Termodinámica (50 puntos)

A una cierta cantidad de gas ideal, que se encuentra inicialmente a una presión P_1 y temperatura T_1, se la somete al siguiente ciclo termodinámico:

Proceso 1 → 2: Por medio de un proceso a presión constante el gas alcanza el estado 2 con una temperatura T_2 que es la mitad de T_1. Para que este proceso se lleve a cabo se realizó un trabajo W sobre el gas.

Proceso 2 → 3: Ahora por medio de un proceso a volumen constante se lleva al gas a un estado 3 con una presión $P_3 = \frac{4}{5}P_1$.

Proceso 3 → 4: Manteniendo constante la temperatura se lleva al gas a un estado 4 con un volumen $V_4 = 4V_1$.

Proceso 4 → 1: Finalmente se aisla el gas llevándolo al mismo al estado inicial.

a) i) Realice un digrama P-V

ii) Determine la presión, volumen y temperatura en cada uno de los estados en función de W, T_1 y P_1. Exprese los resultados en una tabla.

iii) Halle el valor de γ para el gas e indique si se trata de un gas monoatómico, diatómico o poliatómico.

b) Escriba en función de W el trabajo neto realizado sobre el gas, el calor neto intercambiado por el gas y la variación de energía interna entre los estados 1 y 3, ΔU_{13}.

c) ¿Este ciclo describe una máquina térmica o un refrigerador? Calcule la eficiencia o el rendimiento según corresponda.

d) Determine la variación de entropía del gas para cada uno de los procesos. Exprese el resultado en función de W y T_1.

Solución Ejercicio 1 (20 puntos)

a) **(10 puntos)** Tenemos una cuerda con extremos fijos en $x = -L$ y $x = L$, como resultado tenemos una onda estacionaria con los valores posible de longitudes de onda $\lambda_n = \frac{2l}{n}$ con $l = 2L = 6\ cm$.

Nos dicen que la cuerda vibra en la tercer frcuencia más baja posible de forma tal que $n = 3$, por lo tanto la longitud de onda de la cuerda es $\lambda = \frac{2l}{3} = 4\ cm$.

De las condiciones $y(x_a, t_0) = -2\ cm$, $y(x_a, t_1) = 2\ cm$ con $t_0 = 0\ s$ y $t_1 = 1{,}2\ ms$, podemos deducir que el periodo es $T = 2t_1$, de donde $f = \frac{1}{2t_1} = 417$ Hz.

Como $v = \lambda f$ y $v = \sqrt{F/\mu}$, despejando encontramos que la tensión es $F = \mu(\lambda f)^2$. Usando que $\mu = 0{,}005\ kg/m$ se llega a que $F = 1{,}39\ N$.

Se sabe que x_a es el antinodo que se encuentra más cerca del extremos que está en $x = -L$. En esta situación los antinodos se encuentran en: $x_1 = \frac{\lambda}{4} - L$, $x_2 = \frac{3\lambda}{4} - L$, $x_3 = \frac{5\lambda}{4} - L$ con $L = 3\ cm$ donde $x_a = x_1 = -2\ cm$

b) **(6 puntos)** La ecuación de onda estacionaria general es

$$y_n(x,t) = A \sin\left(\frac{n\pi}{2L}(x+L)\right)\cos(\omega_n t)$$

en este caso $n = 3$, $A = -2$ cm y $\omega_3 = 2\pi f$:

$$y(x,t) = -2\ cm \sin\left(\frac{3\pi(x+L)}{2L}\right)\cos\left(\frac{\pi}{t_1}t\right)$$

con las condiciones de borde $y(L,t) = 0\ cm$ e $y(-L,t) = 0\ cm\ \forall t$. Se verifican las condiciones de borde:

$$y(-L,t) = -2\ cm \sin(0)\cos\left(\frac{\pi t}{t_1}\right) = 0\ cm$$

$$y(L,t) = -2\ cm \sin(3\pi)\cos\left(\frac{\pi t}{t_1}\right) = 0\ cm$$

c) **(4 puntos)** La gráfica de $y(x, t = t_1/2)$ es la siguiente:

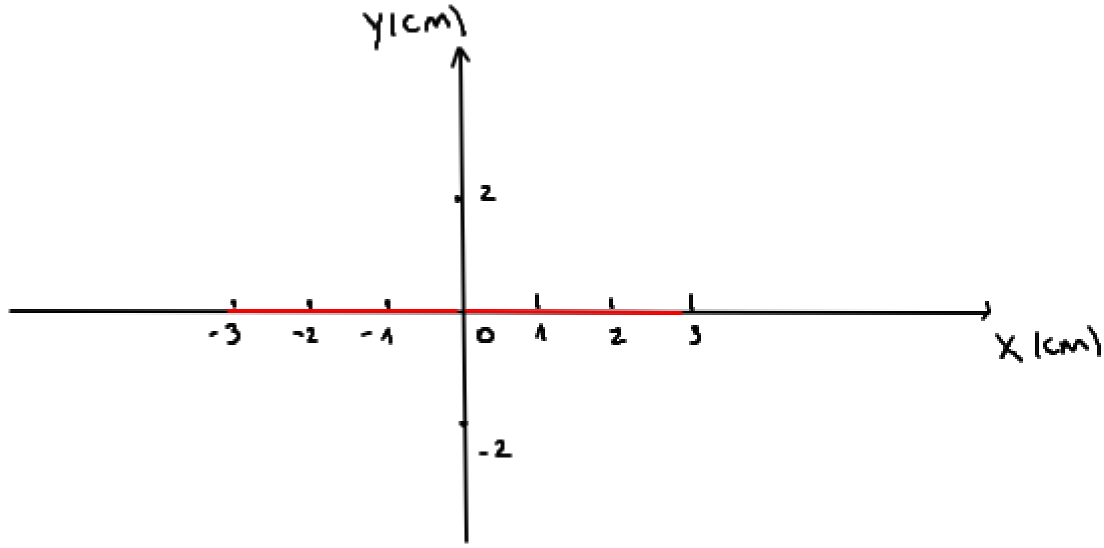


Figura 2

La gráfica de $y(x, 2t_1)$ es la siguiente:

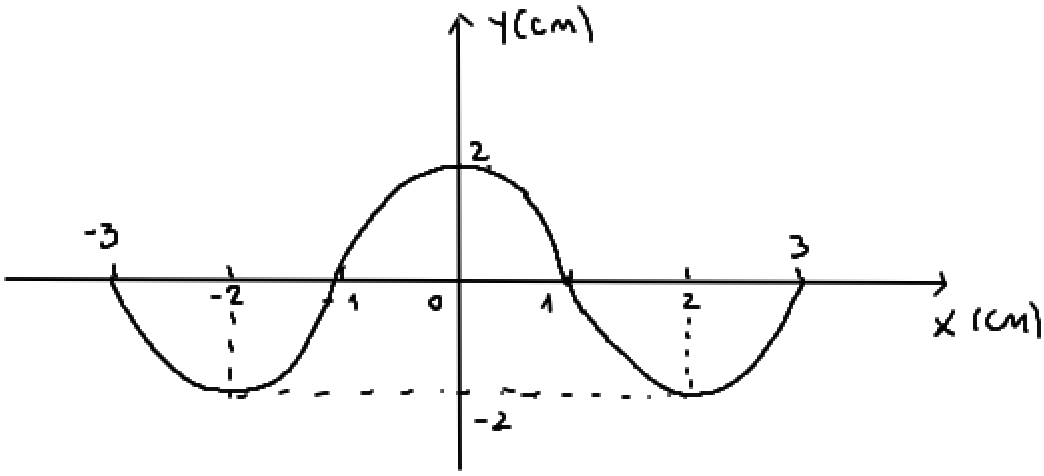


Figura 3

La gráfica $y(x, 2t_1)$ se repite para $t = 2nt_1$ con $n = 2, 3, 4$. La gráfica $y(x, \frac{t_1}{2})$ se repite para $t = \frac{n}{2}t_1$ con $n = 3, 5, 7....$

Solución Ejercicio 2 (30 puntos)

a) **(6 puntos)** La sección del tanque es mucho mayor que S, entonces, por continuidad, $v_1 \ll v$. Aplicando Bernoulli entre 1 y 5, teniendo en cuenta que $P_1 = P_5 = P_0$, se obtiene: $D = \frac{v^2}{2g}$.

b) **(12 puntos)** Teniendo en cuenta que todos los caños tienen misma sección, por continuidad $v_3 = v_4$. Por lo tanto, aplicando Bernoulli entre 3 y 4:

$$P_4 = P_3 + \rho g L.$$

Aplicando estática dentro del manómetro, entre 4 y A (ver figura):

$$P_A = P_4 + \rho g(x + d).$$

Sustituyendo P_4:

$$P_A = P_3 + \rho g(L + x + d).$$

Aplicando estática entre 5 y B (ver figura):

$$P_B = P_0 + \rho g(H - D + L + x) + \rho' g d.$$

Por estática $P_A = P_B$:

$$P_3 = P_0 + \rho g(H - D - d) + \rho' g d = P_0 + \rho g H + \rho g d - \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Aplicando Bernoulli entre 1 y 3, teniendo en cuenta que $v_1 \ll v_3$:

$$P_0 + \rho g H = P_3 + \frac{1}{2}\rho v_3^2.$$

De donde

$$v_3 = \sqrt{v^2 - 2gd\left(\frac{\rho' - \rho}{\rho}\right)} = \sqrt{v^2 - 2gd}.$$

Por continuidad:

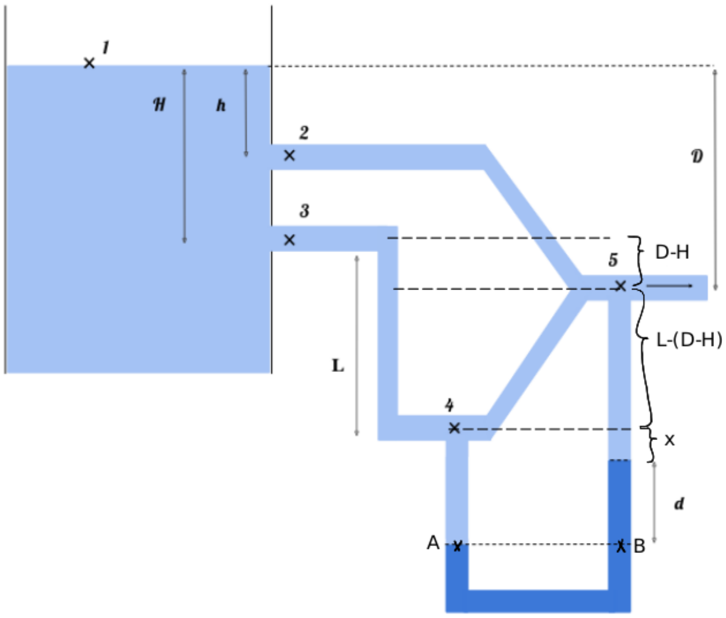
$$v_2 = v - v_3 = v - \sqrt{v^2 - 2gd}.$$

c) **(12 puntos)** De la parte anterior se obtuvo:

$$P_3 = P_0 + \rho g H + \rho g d - \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Aplicando Bernoulli entre 1 y 2:

$$P_2 = P_0 + \rho g h - \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$



Solución Ejercicio 3 (50 puntos)

a) **(16 puntos)** Por letra sabemos que el trabajo realizado sobre el gas en el proceso $1 \to 2$ es W, debido a que este es un proceso a presión constante tenemos:

$$W = -\int P_1 dV = -(V_2 - V_1)P_1 = -(V_1/2 - V_1)P_1 \Rightarrow V_1 = \frac{2W}{P_1}$$

Una vez que obtenemos la expresión para V_1 y considerando como datos de la letra P_1 y T_1 obtenemos el número de moles mediante la ecuación de estado para el gas ideal:

$$n = \frac{P_1 V_1}{RT_1} = \frac{2W}{RT_1} \tag{1}$$

Para el estado 2 ya tenemos que $T_2 = T_1/2$ y $P_2 = P_1$ por que el proceso de $1 \to 2$ es isobaro. Con el número de moles recién calculado obtenemos:

$$V_2 = nRT_2/P_2 = W/P_1 \tag{2}$$

El proceso $2 \to 3$ es un proceso isocoro, por lo tanto $V_3 = V_2 = W/P_1$. La presión $P_3 = \frac{4}{5}P_1$ es dada por la letra. Utilizando estas variables junto con el número de moles obtenemos T_3 mediante la ecuación de estado:

$$T_3 = \frac{P_3 V_3}{nR} = \frac{2T_1}{5} \tag{3}$$

El proceso $3 \to 4$ es a temperatura constante, por lo tanto $T_4 = T_3 = \frac{2T_1}{5}$, además por letra sabemos que $V_4 = 4V_1 = \frac{8W}{P_1}$. Nuevamente utilizando la ecuación de estado:

Variable	1	2	3	4
P	P_1	P_1	$\frac{4}{5}P_1$	$\frac{1}{10}P_1$
V	$\frac{2W}{P_1}$	$\frac{W}{P_1}$	$\frac{W}{P_1}$	$\frac{8W}{P_1}$
T	T_1	$\frac{T_1}{2}$	$\frac{2T_1}{5}$	$\frac{2T_1}{5}$
n	$\frac{2W}{T_1R}$	$\frac{2W}{T_1R}$	$\frac{2W}{T_1R}$	$\frac{2W}{T_1R}$

Cuadro 1

$$P_4 = \frac{nRT_4}{V_4} = \frac{P_1}{10} \tag{4}$$

Para determinar de que tipo de gas se trata utilizaremos el proceso $4 \to 1$, debido a que el gas es aislado en este proceso podemos decir que es un proceso adiabático, no hay intercambio de calor. Por lo tanto $P_4V_4^\gamma = P_1V_1^\gamma$.

$$P_1/P_4 = (V_4/V_1)^\gamma \to \gamma = \frac{\ln(P_1/P_4)}{\ln(V_4/V_1)} = \frac{\ln(10)}{\ln(4)} \approx \frac{5}{3} \tag{5}$$

De esta forma obtenemos $\gamma \approx \frac{5}{3}$ por lo tanto se trata de un gas monoatómico. Los calores específicos a volumen y presión constante nos quedan: $C_V = (3/2)R$ y $C_P = (5/2)R$.

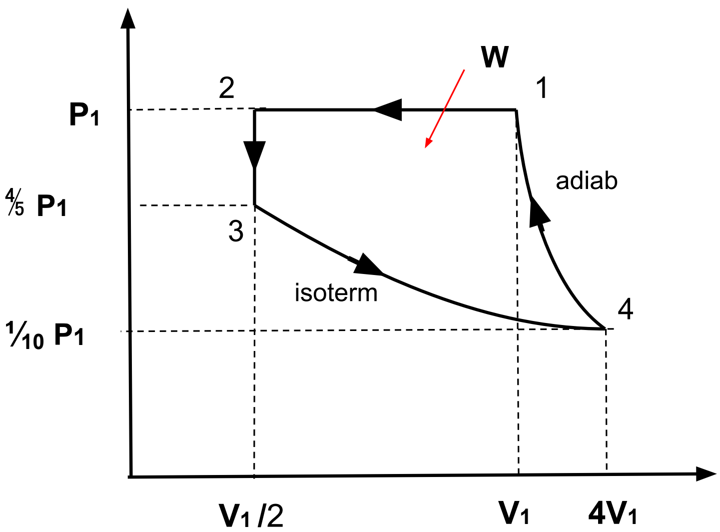


Figura 4: Diagrama P-V

b) **(12 puntos)** Calculamos el trabajo realizado sobre el gas en cada proceso:

$W_{12} = W$

$W_{23} = 0$, debido a que es un proceso isocoro.

$W_{34} = -\int PdV = -nRT_4 \int \frac{dV}{V} = -\ln(8)\frac{4}{5}W$, debido a que es un proceso isotermo.

$W_{41} = \Delta U_{41} = nC_V(T_1 - T_4) = \frac{9}{5}W$, debido a que es un proceso adiabático y $Q_{41} = 0$.

Finalmente obtenemos el trabajo neto sumando todos los trabajos calculados:

$$W_{neto} = W_{12} + W_{34} + W_{41} = W - \ln(8)\frac{4}{5}W + \frac{9}{5}W = -\ln(8)\frac{4}{5}W + \frac{14}{5}W \tag{6}$$

Calculamos el calor neto intercambiado utilizando que la variación de energía interna en un ciclo es nula:

$$W_{neto} + Q_{neto} = \Delta U_{ciclo} = 0 \rightarrow Q_{neto} = -W_{neto} = +\ln(8)\frac{4}{5}W - \frac{14}{5}W \tag{7}$$

La variación de energía interna del gas en los proceso $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ se puede calcular de la siguiente manera:

$$\Delta U_{13} = \Delta U_{12} + \Delta U_{23} = nC_V(\Delta T_{12} + \Delta T_{23}) = -\frac{9}{5}W \tag{8}$$

c) **(6 puntos)** El ciclo describe un refrigerador ya que el sentido del mismo es antihorario. Para calcular el coeficiente de rendimiento η necesitamos el calor entrante Q_{in} y el trabajo neto W_{neto}. El trabajo neto ya lo obtivimos en la parte b). El calor entrante corresponde al calor recibido por el gas, en este ciclo podemos ver que el gas recibe calor solamente en el proceso isotermo $3 \rightarrow 4$, entonces:

$$\Delta U_{34} = 0, \quad Q_{in} = Q_{34} = -W_{34} = \ln(8)\frac{4}{5}W \tag{9}$$

$$\eta = \frac{|Q_{in}|}{|W_{neto}|} = \frac{\ln(8)\frac{4}{5}W}{-\ln(8)\frac{4}{5}W + \frac{14}{5}W} = \frac{1}{-1 + \frac{7}{2\ln(8)}} = 1{,}46 \tag{10}$$

d) **(16 puntos)** Variación de entropía para un proceso isobaro:

$$\Delta S_{P=cte} = \int đQ/T = \int nC_P dT/T = nC_P \ln(V_f/V_i) \tag{11}$$

Variación de entropía para un proceso isocoro:

$$\Delta S_{V=cte} = \int đQ/T = \int nC_V dT/T = nC_V \ln(P_f/P_i) \tag{12}$$

Variación de entropía para un proceso isotermo:

$$\Delta S_{T=cte} = \int \text{đ}Q/T = \frac{1}{T}\int \text{đ}Q = \frac{Q}{T} = -\frac{W}{T} = nR\ln(V_f/V_i) \tag{13}$$

Utilizando las expresiones anteriores obtenemos:

$$\Delta S_{12} = nC_P \ln(V_2/V_1) = \frac{5W\ln(1/2)}{T_1} \tag{14}$$

$$\Delta S_{23} = nC_V \ln(P_3/P_2) = \frac{3W\ln(4/5)}{T_1} \tag{15}$$

$$\Delta S_{34} = nR\ln(V_4/V_1) = \frac{2W\ln(8)}{T_1} \tag{16}$$

Debido a que el cambio de entropía en un ciclo es $\Delta S_{ciclo} = 0$ podemos despejar el cambio de entropía en el proceso $4 \to 1$:

$$\Delta S_{41} = -(\Delta S_{12} + \Delta S_{23} + \Delta S_{34}) = -\frac{W\ln(128/125)}{T_1} \tag{17}$$