2do. parcial - Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables (Soluciones)

PARTE I: VERDADERO O FALSO

Verdadero o Falso #1

V1: Sea

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- **Verdadero**
- Falso

Solución: Usamos la forma polar de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$, la cual es $e^{i\pi/4}$. Luego,

$$z = (e^{i\pi/4})^{2021} = e^{i2021\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(505\pi + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i505\pi}e^{i\pi/4} = -e^{i\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Otra manera de resolverlo es la siguiente: llevar el complejo $w = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$ a un complejo más sencillo, como i, que es un complejo cuyas potencias se repiten periódicamente. Por ejemplo, para i sabemos:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \cdots$$

Veamos que pasa si hacemos w^2:

$$w^2 = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(1+i)(1+i)}{2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{1+2i-1}{2} = i.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot w^{2020} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left[\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{1010} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot i^{1010} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot i^2 \cdot i^{1008} \\ &= \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-1) \cdot (i^4)^{252} = \left(\frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1^{252} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

V2: Sea

$$z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Verdadero
- **Falso**

Solución: Usamos la forma polar de $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$, la cual es $e^{-i\pi/4}$. Luego,

$$z = (e^{-i\pi/4})^{2021} = e^{-i2021\frac{\pi}{4}} = e^{i\left(-505\pi - \frac{\pi}{4}\right)} = e^{-i505\pi}e^{-i\pi/4} = -e^{-i\pi/4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Otra manera de resolverlo es la siguiente: llevar el complejo $w = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$ a un complejo más sencillo, como i, que es un complejo cuyas potencias se repiten periódicamente. Por ejemplo, para i sabemos:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \cdots$$

Veamos que pasa si hacemos w^2:

$$w^2 = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(1-i)(1-i)}{2} = \frac{1-2i+i^2}{2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot w^{2020} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left[\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{1010} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-i)^{1010} \\ &= \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-i)^2 \cdot (-i)^{1008} = \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right) \cdot (-1) \cdot (i^4)^{252} = \left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) \cdot 1^{252} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

V3: Sea

$$z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- Verdadero
- **Falso**

Solución: Por V2 se tiene $z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = (-1)^{2021}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}$.

V4: Sea

$$z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021}.$$

Entonces

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

- **Verdadero**
- Falso

Solución: Por V1 se tiene $z = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = (-1)^{2021}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{2021} = -\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$.

Verdadero o Falso #2

V1: Considere la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\cos(2\pi/n)}{n^2}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, (a_n) es monótona y convergente.

- Verdadero
- **Falso**

Solución: La sucesión no es monótona ya que $a_1 = 1 > -\frac{1}{4} = a_2$, y $a_2 = -\frac{1}{4} < -\frac{1}{18} = a_3$.

V2: Considere (a_n) la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\cos(2\pi/n)}{n^2}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, tanto (a_n) como la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergen.

- **Verdadero**
- Falso

Solución: La sucesión (a_n) converge a cero, y la serie $\sum a_n$ converge absolutamente (por ende converge) por el criterio de comparación, ya que $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ para todo $n \geq 1$, y $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

V3: Considere (a_n) la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\sin(2\pi/n) + 1}{n}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, (a_n) es monótona y convergente.

- Verdadero
- **Falso**

Solución: La sucesión no es monótona ya que $a_1 = 1 > \frac{1}{2} = a_2$ y $a_2 = \frac{1}{2} < \frac{2+\sqrt{3}}{6} = a_3$.

V4: Considere (a_n) la sucesión dada por

$$a_n = \frac{\sin(2\pi/n) + 1}{n}$$

para $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces, (a_n) converge y la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

- **Verdadero**
- Falso

Solución: La sucesión (a_n) converge a cero, y la serie $\sum a_n$ diverge por el criterio de comparación, ya que $a_n > \frac{1}{n}$ para todo $n \geq 1$, y $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Verdadero o Falso #3

V1: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\operatorname{int}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} \operatorname{int}(A_n).$$

- Verdadero
- **Falso**

Solución: $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \{(0,0)\} = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{int}(A_n)$, y por otro lado, $\mathrm{int}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \mathrm{int}(\{(0,0)\}) = \emptyset$.

V2: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right] \times \left[-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{int}(A_n).$$

- **Verdadero**
- Falso

Solución: $\bigcap_{n\geq 1} A_n = [-1,1] \times [-1,1] = \bigcap_{n\geq 1} \mathrm{int}(A_n)$.

V3: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] \times \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\partial\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \bigcap_{n\geq 1} \partial(A_n).$$

- Verdadero
- **Falso**

Solución: Por un lado, $\bigcap_{n\geq 1} A_n = \{(0,0)\}$ y así $\partial\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \partial(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$. Por otro lado, $\bigcap_{n\geq 1} \partial(A_n) = \emptyset$.

V4: Considere la familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$A_n = \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \times \left(-1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$$

con $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Entonces,

$$\bigcap_{n\geq 1} A_n = \mathrm{int}\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right).$$

- Verdadero
- **Falso**

Solución: $\bigcap_{n\geq 1} A_n = [-1,1] \times [-1,1]$ no es abierto.

Verdadero o Falso #4

V1: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = \overline{B}((0,0), 1 + 1/n)$ la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio $1 + 1/n$. Si $U = \bigcap_{n\geq 1} U_n$ es la intersección de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U posee máximo y mínimo absoluto.

- **Verdadero**
- Falso

Solución: Al ser $U = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ cerrado (por ser intersección de cerrados) y acotado, y f continua, se tiene que $f|_U$ posee máximo y mínimo absoluto por el Teorema de Weierstrass.

V2: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = \overline{B}((0,0), 2 + 1/n)$ la bola cerrada de centro $(0,0)$ y radio $2 + 1/n$. Si $U = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ es la intersección de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U no posee máximo absoluto.

- Verdadero
- **Falso**

Solución: Al ser $U = \bigcap_{n \geq 1} U_n$ cerrado (por ser intersección de cerrados) y acotado, y f continua, se tiene que $f|_U$ posee máximo absoluto por el Teorema de Weierstrass.

V3: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = B((0,0), 3 - 1/n)$ la bola abierta de centro $(0,0)$ y radio $3 - 1/n$. Si $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$ es la unión de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U no posee necesariamente mínimo absoluto.

- Verdadero
- **Falso**

Solución: Note que $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n = B((0,0), 3)$ es abierto (por ser la unión de abiertos). Si bien no se cumple una de las hipótesis del Teorema de Weierstrass, la tesis aún podría cumplirse para ciertos ejemplos de f (recuerde que dicho teorema no es un enunciado del tipo "si, y sólo si"). Tal es el caso de $f(x, y) = x^2 + y^2$ (paraboloide circular), pues $f|_U$ posee mínimo absoluto en $(0,0)$ igual a cero.

V4: Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua y $U_n = B((0,0), 4 - 1/n)$ la bola abierta de centro $(0,0)$ y radio $4 - 1/n$. Si $U = \bigcup_{n \geq 1} U_n$ es la unión de todas las bolas anteriores, entonces la restricción $f|_U$ de f sobre U posee necesariamente máximo y mínimo absoluto.

- Verdadero
- **Falso**

Solución: Note que $U = \bigcup_{n \geq 1} B((0,0), 4 - 1/n) = B((0,0), 4)$ es abierto. Al no cumplirse una de la hipótesis del Teorema de Weierstrass, se puede hallar una función continua f para la cual $f|_U$ no posea máximo o mínimo absoluto. La función de la versión 3 no posee máximo absoluto, ya que 4 es el supremo de $\mathrm{Im}(f|_U)$ pero $f(x, y) < 4$ para todo $(x, y) \in U$.

Múltiple Opción #1

V1: Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 2e^{2t}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$x(t) = t^2 e^{2t}$$

es solución de la ecuación. Entonces $\alpha + \beta$ vale:

- **0**
- -1
- -2
- 1
- 2

Solución: Imponemos que la función $x(t) = t^2 e^{2t}$ satisface la ecuación diferencial para así sacar las condiciones sobre α y β.

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2 e^{2t}, \\ x'(t) &= 2te^{2t} + 2t^2 e^{2t}, \\ x''(t) &= 2e^{2t} + 8te^{2t} + 4t^2 e^{2t}. \end{aligned}$$

Imponemos esto en la ecuación:

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \beta x(t) = (2\alpha + \beta + 4)t^2 e^{2t} + (2\alpha + 8)te^{2t} + 2e^{2t}.$$

Esta última expresión queremos que sea igual a $2e^{2t}$. Entonces igualando coeficiente a coeficiente obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + 4 &= 0, \\ 2\alpha + 8 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que $\alpha = -4$ y $\beta = 4$. Por lo que la respuesta es $\alpha + \beta = 0$.

V2: Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 2e^{3t}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$x(t) = t^2 e^{3t}$$

es solución de la ecuación. Entonces $\alpha + \beta$ vale:

- **3**
- 0
- 1
- 2
- 4

Solución: Imponemos que la función $x(t) = t^2e^{3t}$ satisface la ecuación diferencial para así sacar las condiciones sobre α y β.

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2e^{3t}, \\ x'(t) &= 2te^{3t} + 3t^2e^{3t}, \\ x''(t) &= 2e^{3t} + 12te^{3t} + 9t^2e^{3t}. \end{aligned}$$

Imponemos esto en la ecuación:

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \beta x(t) = (9 + 3\alpha + \beta)t^2e^{3t} + (12 + 2\alpha)te^{3t} + 2e^{3t}.$$

Esta última expresión queremos que sea igual a $2e^{3t}$. Entonces igualando coeficiente a coeficiente obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 9 + 3\alpha + \beta &= 0, \\ 12 + 2\alpha &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que $\alpha = -6$ y $\beta = 9$. Por lo que la respuesta es $\alpha + \beta = 3$.

V3: Se considera la ecuación diferencial

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 2e^{-2t}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$x(t) = t^2e^{-2t}$$

es solución de la ecuación. Entonces $\alpha + \beta$ vale:

- **8**
- 2
- 4
- 6
- 10

Solución: Imponemos que la función $x(t) = t^2e^{-2t}$ satisface la ecuación diferencial para así sacar las condiciones sobre α y β.

$$\begin{aligned} x(t) &= t^2e^{-2t}, \\ x'(t) &= 2te^{-2t} - 2t^2e^{-2t}, \\ x''(t) &= 2e^{-2t} - 8te^{-2t} + 4t^2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Imponemos esto en la ecuación:

$$x''(t) + \alpha x'(t) + \beta x(t) = (4 - 2\alpha + \beta)t^2e^{-2t} + (2\alpha - 8)te^{-2t} + 2e^{-2t}.$$

Esta última expresión queremos que sea igual a $2e^{-2t}$. Entonces igualando coeficiente a coeficiente obtenemos las siguientes dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4 - 2\alpha + \beta &= 0, \\ 2\alpha - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo obtenemos que $\alpha = 4$ y $\beta = 4$. Por lo que la respuesta es $\alpha + \beta = 8$.

Múltiple Opción #2

V1: Se considera el sólido
$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1 \right\}.$$

Entonces la integral $\displaystyle\iiint_D z^3 + z \, dxdydz$ vale

- **0**
- $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{2\pi}{3}$
- $-\frac{\pi^2}{4}$
- $\sqrt{3}\pi$

Solución: Una forma de resolver la integral es notar que la función $f(x,y,z) = z^3 + z$ es impar según el eje z y que estamos integrando con respecto a un conjunto D que es simétrico con respecto a $z = 0$. Por lo tanto $\iiint_D f = 0$.

La otra forma de resolver la integral es mediante un cambio de variable a coordenadas esféricas reescalado. Planteamos así el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y &= \rho \sin(\varphi)\sin(\theta), \\ \frac{z}{2} &= \rho\cos(\varphi), \end{aligned}$$

donde $\rho \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi)$.

De esta forma obtenemos una función $g\colon [0,+\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(\rho,\varphi,\theta) = (\rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), 2\rho\cos(\varphi)) = (x,y,z),$$

y cuya matriz Jacobiana es

$$J_g(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 2\cos(\varphi) & -2\rho\sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el resultado conocido sobre las coordenadas esféricas obtenemos que

$$\det(J_g(\rho,\varphi,\theta)) = 2\rho^2\sin(\varphi).$$

Luego, por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_D z^3 + z \, dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 [(2\rho\cos(\varphi))^3 + 2\rho\cos(\varphi)]2\rho^2\sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= 2\pi\int_0^{\pi} 2\sin(\varphi)\left(\int_0^1 8\rho^5\cos^3(\varphi) + 2\rho^3\cos(\varphi)\, d\rho\right) d\varphi \\ &= 4\pi\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\left(\frac{4}{3}\rho^6\cos^3(\varphi) + \frac{1}{2}\rho^4\cos(\varphi)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}\right) d\varphi \\ &= 4\pi\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\left(\frac{4}{3}\cos^3(\varphi) + \frac{1}{2}\cos(\varphi)\right) d\varphi. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = \cos(\varphi)$ tenemos que

$$4\pi\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\left(\frac{4}{3}\cos^3(\varphi) + \frac{1}{2}\cos(\varphi)\right) d\varphi = 4\pi\int_{-1}^{1}\frac{4}{3}u^3 + \frac{1}{2}u\, du = 0.$$

V2: Se considera el sólido

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \frac{x^2}{9} + y^2 + z^2 \leq 1\right\}.$$

Entonces la integral $\displaystyle\iiint_D z^3 + z \; dxdydz$ vale

- **0**
- $-\frac{\sqrt{3}}{3}$
- $\frac{4\pi}{9}$
- $-\frac{\pi^2}{9}$
- $\sqrt{6}\pi$

Solución: Una forma de resolver la integral es notar que la función $f(x,y,z) = z^3 + z$ es impar según el eje z y que estamos integrando con respecto a un conjunto D que es simétrico con respecto a $z = 0$. Por lo tanto $\iiint_D f = 0$.

La otra forma de resolver la integral es mediante un cambio de variable a coordenadas esféricas reescalado. Planteamos así el cambio de variable

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \rho \sin(\varphi)\cos(\theta), \\ y &= \rho \sin(\varphi)\sin(\theta), \\ z &= \rho\cos(\varphi), \end{aligned}$$

donde $\rho \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi)$.

De esta forma obtenemos una función $g\colon [0,+\infty) \times [0, 2\pi) \times [0,\pi) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(\rho,\varphi,\theta) = (3\rho\sin(\varphi)\cos(\theta), \rho\sin(\varphi)\sin(\theta), \rho\cos(\varphi)) = (x,y,z),$$

y cuya matriz Jacobiana es

$$J_g(\rho,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} 3\sin(\varphi)\cos(\theta) & 3\rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -3\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ \sin(\varphi)\sin(\theta) & \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & \rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ 2\cos(\varphi) & -2\rho\sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el resultado conocido sobre las coordenadas esféricas obtenemos que

$$\det(J_g(\rho,\varphi,\theta)) = 3\rho^2\sin(\varphi).$$

Luego, por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_D z^3 + z \, dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 [(\rho\cos(\varphi))^3 + \rho\cos(\varphi)] 3\rho^2 \sin(\varphi)\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} 3\sin(\varphi)\left(\int_0^1 \rho^5\cos^3(\varphi) + \rho^3\cos(\varphi)\, d\rho\right) d\varphi \\ &= 6\pi\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\left(\frac{1}{6}\rho^6\cos^3(\varphi) + \frac{1}{4}\rho^4\cos(\varphi)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1}\right) d\varphi \\ &= 6\pi\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\left(\frac{1}{6}\cos^3(\varphi) + \frac{1}{4}\cos(\varphi)\right) d\varphi. \end{aligned}$$

Realizando el cambio de variable $u = \cos(\varphi)$ tenemos que

$$6\pi\int_0^{\pi}\sin(\varphi)\left(\frac{1}{6}\cos^3(\varphi) + \frac{1}{4}\cos(\varphi)\right) d\varphi = 6\pi\int_{-1}^{1}\frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{4}u\, du = 0.$$

V3: Se considera el sólido

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + \frac{y^2}{16} + z^2 \leq 1 \right\}.$$

Entonces la integral $\iiint_D z^3 + z \; dxdydz$ vale

- **0**
- $-\frac{1}{2}$
- $\frac{\pi}{3}$
- $-\frac{\pi^2}{16}$
- 4π

Solución: Una forma de resolver la integral es notar que la función $f(x, y, z) = z^3 + z$ es impar según el eje z y que estamos integrando con respecto a un conjunto D que es simétrico con respecto a $z = 0$. Por lo tanto $\iiint_D f \ = 0$.

La otra forma de resolver la integral es mediante un cambio de variable a coordenadas esféricas reescalado. Planteamos así el cambio de variable

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \\ \frac{y}{4} &= \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \\ z &= \rho \cos(\varphi), \end{aligned}$$

donde $\rho \in [0, +\infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ y $\varphi \in [0, \pi)$.

De esta forma obtenemos una función $g\colon [0, +\infty) \times [0, 2\pi) \times [0, \pi) \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$g(\rho, \varphi, \theta) = (\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), 4\rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi)) = (x, y, z),$$

y cuya matriz Jacobiana es

$$J_g(\rho, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \sin(\varphi)\cos(\theta) & \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\varphi)\sin(\theta) \\ 4\sin(\varphi)\sin(\theta) & 4\rho\cos(\varphi)\sin(\theta) & 4\rho\sin(\varphi)\cos(\theta) \\ \cos(\varphi) & \rho\sin(\varphi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizando el resultado conocido sobre las coordenadas esféricas obtenemos que

$$\det(J_g(\rho, \varphi, \theta)) = 4\rho^2 \sin(\varphi).$$

Luego, por el teorema de cambio de variable tenemos que

$$\begin{aligned} \iiint_D z^3 + z \, dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{1} [(\rho\cos(\varphi))^3 + \rho\cos(\varphi)] 3\rho^2 \sin(\varphi) \, d\rho \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} 4\sin(\varphi) \left(\int_0^1 \rho^5 \cos^3(\varphi) + \rho^3 \cos(\varphi) \, d\rho \right) d\varphi \\ &= 8\pi \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{6}\rho^6 \cos^3(\varphi) + \frac{1}{4}\rho^4 \cos(\varphi) \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} \right) d\varphi \\ &= 8\pi \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{6}\cos^3(\varphi) + \frac{1}{4}\cos(\varphi) \right) d\varphi. \end{aligned}$$

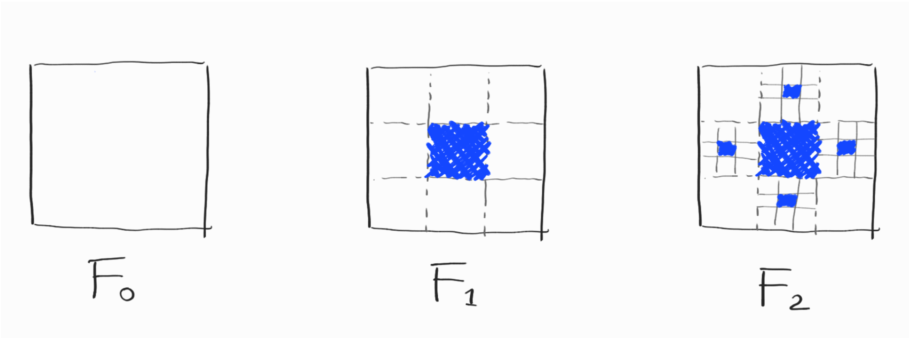
Realizando el cambio de variable $u = \cos(\varphi)$ tenemos que

$$8\pi \int_0^{\pi} \sin(\varphi) \left(\frac{1}{6}\cos^3(\varphi) + \frac{1}{4}\cos(\varphi) \right) d\varphi = 8\pi \int_{-1}^{1} \frac{1}{6}u^3 + \frac{1}{4}u \, du = 0.$$

Múltiple Opción #3

V1: Sea F_0 un cuadrado de lado 3, que está todo pintado de blanco.

- A partir de F_0, construimos la figura F_1 de la siguiente manera: subdividimos el cuadrado grande en 9 cuadrados iguales, tomamos el cuadrado central, y lo pintamos de azul.
- Ahora construimos F_2: subdividimos cada uno de los **cuatro** cuadrados adyacentes con el central, en nueve cuadrados iguales, y pintamos los cuatro cuadrados centrales respectivos, de azul.
- Repetimos este proceso inductivamente hasta el infinito.



Al terminar el proceso, ¿cuál es el área que queda pintada de azul?

- $\frac{9}{5}$
- $\frac{7}{3}$
- 5
- $\frac{3}{2}$
- 4

Solución: Sea $\{A_n\}_{n\geq 1}$ el área pintada en cada paso y $A = 9$ el área total del cuadrado.

Para $n = 1$ tenemos que el área pintada es $\frac{1}{9}$ del área total por lo que $A_1 = \frac{1}{9}A$.

Para $n = 2$ pintamos 4 cuadrados de área igual a $\frac{1}{9}A_1$, por lo que A_2 es igual a $\frac{4}{9}A_1 = \frac{4}{9^2}A$.

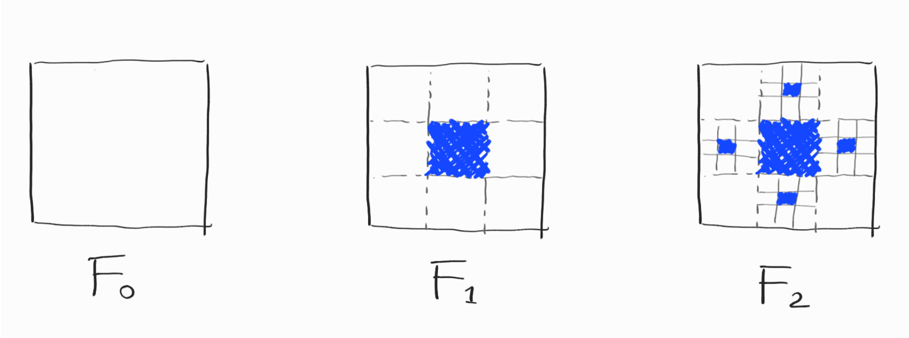
Para $n = 3$ observemos que siempre pintamos 4 cuadrados cuya área es igual a $\frac{1}{9}A_2$. Por lo tanto el área pintada en el paso 3 es igual a $A_3 = \frac{4}{9}A_2 = \frac{4^2}{9^3}A$.

Mediante un razonamiento análogo obtenemos que para todo $n \geq 1$, el área pintada en el paso n es $A_n = \frac{4^{n-1}}{9^n}A$. Por lo tanto el área pintada total es

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^{n-1}}{9^n}A = \frac{A}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{A}{4}\left(\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{4}{9}}\right) = \frac{A}{4}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{A}{5} = \frac{9}{5}.$$

V2: Sea F_0 un cuadrado de lado 6, que está todo pintado de blanco.

- A partir de F_0, construimos la figura F_1 de la siguiente manera: subdividimos el cuadrado grande en 9 cuadrados iguales, tomamos el cuadrado central, y lo pintamos de azul.
- Ahora construimos F_2: subdividimos cada uno de los **cuatro** cuadrados adyacentes con el central, en nueve cuadrados iguales, y pintamos los cuatro cuadrados centrales respectivos, de azul.
- Repetimos este proceso inductivamente hasta el infinito.



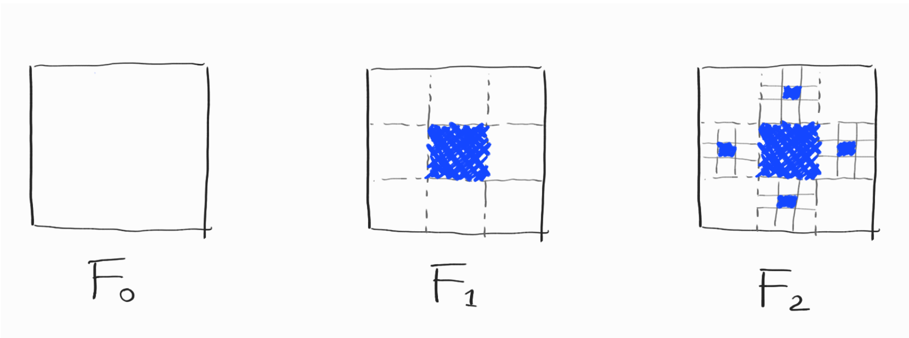
Al terminar el proceso, ¿cuál es el área que queda pintada de azul?

- $\frac{36}{5}$
- $\frac{28}{3}$
- $\frac{21}{2}$
- 6
- 16

Solución: Haciendo $A = 36$ en la solución anterior, se tiene $\frac{A}{5} = \frac{36}{5}$.

V3: Sea F_0 un cuadrado de lado 9, que está todo pintado de blanco.

- A partir de F_0, construimos la figura F_1 de la siguiente manera: subdividimos el cuadrado grande en 9 cuadrados iguales, tomamos el cuadrado central, y lo pintamos de azul.
- Ahora construimos F_2: subdividimos cada uno de los **cuatro** cuadrados adyacentes con el central, en nueve cuadrados iguales, y pintamos los cuatro cuadrados centrales respectivos, de azul.
- Repetimos este proceso inductivamente hasta el infinito.



Al terminar el proceso, ¿cuál es el área que queda pintada de azul?

- $\frac{81}{5}$
- $\frac{62}{3}$
- $\frac{27}{2}$
- 36
- 45

Solución: Haciendo $A = 81$ en la solución anterior de V1, se tiene $\frac{A}{5} = \frac{81}{5}$.

Desarrollo #1

[25 puntos]

(a) Sea

$$f(t) = \frac{1}{t\ \log^2(t-3)}.$$

Determine la convergencia o divergencia de las integrales

$$\int_4^{2021} f(t)\ dt \quad \text{y} \quad \int_{2021}^{+\infty} f(t)\ dt.$$

Luego, clasifique la integral impropia $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(t)\ dt.$ `[12 puntos]`

(b) Enuncie el criterio serie-integral para clasificación de series. `[5 puntos]`

(c) Se considera la serie

$$\sum_{n=2021}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n\ \log^2(n-3)}.$$

Demuestre que esta serie converge absolutamente. `[8 puntos]`

Solución:

(a) Para la integral $\int_4^{2021} f(t)\ dt$, comparamos con la función $g(t) = \frac{1}{(t-4)^2}$. Tenemos que:

$$\lim_{t\to4^+} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to4^+} \frac{\frac{1}{t\ \log^2(t-3)}}{\frac{1}{(t-4)^2}} = \lim_{t\to4^+} \frac{(t-4)^2}{t\ \log^2(t-3)} = \lim_{t\to4^+} \frac{1}{t}\left(\frac{t-4}{\log(t-3)}\right)^2 = \frac{1}{4} > 0.$$

Las funciones f y g son entonces equivalente, por lo que $\int_4^{2021} f(t)\ dt$ y $\int_4^{2021} \frac{dt}{(t-4)^2}$ son de la misma clase. Como $\int_4^{2021} \frac{dt}{(t-4)^2} = \int_0^{2017} \frac{dt}{t^2}$ diverge, se tiene que $\int_4^{2021} f(t)\ dt$ diverge por el criterio de equivalentes.

Para la integral $\int_{2021}^{+\infty} f(t)\ dt = \int_{2021}^{+\infty} \frac{dt}{t\ \log^2(t-3)}$, comparamos con $g(t) = \frac{1}{t\ \log^2(t)}$. Tenemos que:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t\ \log^2(t)}{t\ \log^2(t-3)} = \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\log(t)}{\log(t-3)}\right)^2 = 1.$$

Entonces, las integrales $\int_{2021}^{+\infty} \frac{dt}{t\ \log^2(t-3)}$ y $\int_{2021}^{+\infty} \frac{dt}{t\ \log^2(t)}$ son de la misma clase. Por otro lado,

$$\int_{2021}^{+\infty} \frac{dt}{t\ \log^2(t)} = \lim_{c\to+\infty} \int_{2021}^{c} \frac{dt}{t\ \log^2(t)} = \lim_{c\to+\infty} -\frac{1}{\log(t)}\bigg|_{2021}^{c} = \lim_{c\to+\infty} \left(\frac{1}{\log(2021)} - \frac{1}{\log(c)}\right) = \frac{1}{\log(2021)}.$$

Entonces, la integral $\int_{2021}^{+\infty} \frac{dt}{t\ \log^2(t)}$ converge, y por lo tanto $\int_{2021}^{+\infty} f(t)\ dt$ converge por el criterio de equivalentes.

Finalmente, la integral mixta $\int_4^{+\infty} f(t)\ dt$ diverge ya que $\int_4^{2021} f(t)\ dt$ diverge.

(b) Ver teórico.

(c) Como $|\sin(n)| \leq 1$ para todo $n \geq 2021$, tenemos que

$$\left|\frac{\sin(n)}{n\ \log^2(n-3)}\right| \leq \frac{1}{n\ \log^2(n-3)}.$$

Por otro lado, veamos que la serie $\sum\limits_{n=2021}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n\ \log^2(n-3)}$ converge por el criterio de serie-integral. Consideramos la función $f\colon [2021,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{n\ \log^2(t-3)},$$

la cual es continua y positiva en su dominio. Más aún, la función en creciente ya que

$$t_1 > t_2 \ \Rightarrow\ t_1-3 > t_2-3 \ \Rightarrow\ \log(t_1-3) > \log(t_2-3) > 1 \ \Rightarrow\ \log^2(t_1-3) > \log^2(t_2-3) \ \Rightarrow\ \frac{1}{\log^2(t_1-3)} < \frac{1}{\log^2(t_2-3)}$$

y

$$t_1 > t_2 \ \Rightarrow\ \frac{1}{t_1} < \frac{1}{t_2}.$$

Entonces,

$$t_1 > t_2 \ \Rightarrow\ \frac{1}{t_1\ \log^2(t_1-3)} < \frac{1}{t_2\ \log^2(t_2-3)}.$$

Se verifican así las hipótesis del criterio serie-integral. Como $\int_{2021}^{+\infty} \frac{1}{t\ \log^2(t-3)}\ dt$ converge por la parte (a), se tiene que la serie $\sum\limits_{n=2021}^{+\infty} \frac{1}{n\ \log^2(n-3)}$ converge. Por lo tanto, por el criterio de comparación, la serie $\sum\limits_{n=2021}^{+\infty} \left|\frac{\sin(n)}{n\ \log^2(n-3)}\right|$ converge, es decir, $\sum\limits_{n=2021}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{n\ \log^2(n-3)}$ converge absolutamente.

Desarrollo #2 **[25 puntos]**

Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \lambda & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Hallar el valor de λ para el cual f es continua en $(0,0)$. `[3 puntos]`

Para el valor de λ hallado en la parte (a):

(b) Calcule las derivadas parciales de f en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$. `[6 puntos]`

(c) Determine la diferenciabilidad de f en todos los puntos de $\mathbb{R}^2$. `[12 puntos]`

(d) Calcule las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ donde $\vec{v} = (1,1)$. `[4 puntos]`

Solución:

(a) Para encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ que hace que la función f sea continua en $(0,0)$ debemos estudiar $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Pasando a polares $x = \rho\cos(\theta)$ e $y = \rho\sin(\theta)$ obtenemos

$$f(\rho,\theta) = \frac{\rho^3\sin^3(\theta)}{\rho^2} = \rho\sin^3(\theta).$$

Como $f(\rho,\theta)$ es de la forma $h(\rho)g(\theta)$ donde $h(\rho) = \rho$ y $g(\theta) = \sin^3(\theta)$ y además $h(\rho) \to 0$ cuando $\rho \to 0$ y $g(\theta)$ está acotado, tenemos que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0} h(\rho)g(\theta) = 0.$$

Por lo tanto para que $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$ debemos elegir $\lambda = 0$.

Otra forma de verlo es escribir $\frac{y^3}{x^2+y^2} = y \cdot \frac{y^2}{x^2+y^2}$, donde la función $(x,y) \mapsto y$ tiende a cero en $(0,0)$, mientras que la función $(x,y) \mapsto \frac{y^2}{x^2+y^2}$ está acotada (por 1) en un entorno reducido de $(0,0)$.

(b) Observar que si $(x, y) \neq (0,0)$ como la función es un cociente de funciones derivables, podemos calcular las derivadas parciales sin hacer el límite, de donde

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{2y^3 x}{(x^2 + y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Por otro lado, si $(x, y) = (0,0)$ debemos realizar la derivada mediante el límite del cociente incremental. Por un lado

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

mientras que por otro

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

(c) Si $(x, y) \neq (0,0)$ la función es diferenciable por ser cociente de funciones diferenciables y en donde el denominador no se anula.

Si $(x, y) = (0,0)$ entonces debemos verificar la definición de diferenciabilidad, es decir debemos ver si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x, y)}{||(x, y)||} = 0$$

donde

$$r(x, y) = f(x, y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = f(x, y) - y = \frac{y^3}{x^2 + y^2} - y = -\frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Luego

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x, y)}{||(x, y)||} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{\frac{x^2y}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} -\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Observar que si nos acercamos por la recta $x = y$ tenemos que

$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{2\sqrt{2}|x|^3} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{2\sqrt{2}|x|}.$$

Como el límite anterior no existe, la función no es diferenciable en $(0,0)$.

(d) En $(0,1)$ como la función es diferenciable tenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,1) = \langle \nabla_f(0,1), (1,1)\rangle = \left\langle \left(-\frac{2y^3 x}{(x^2 + y^2)^2}\Big|_{(0,1)}, \frac{3x^2y^2 + y^4}{(x^2 + y^2)^2}\Big|_{(0,1)} \right), (1,1) \right\rangle = \langle (0,1), (1,1)\rangle = 1.$$

Como en $(0,0)$ la función no es diferenciable, debemos estudiar el límite:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{2h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$