Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2018**

EXAMEN – JUEVES 19 DE JULIO DE 2018

Nro de lista	Cédula	Apellido y nombre

(I) Múltiple opción. Total: 64 puntos

Puntajes: 8 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar y -1 si la respuesta es incorrecta.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes, con letras mayúsculas imprenta: A, B, C, D o E.

Ejer. 1	Ejer. 2	Ejer. 3	Ejer. 4	Ejer. 5	Ejer. 6	Ejer. 7	Ejer. 8
D	B	C	A	B	C	D	C

Ejercicio 1

Sea $z = (-1+i)^8$.
Indicar la opción correcta:

(A) $z = -16$
(B) $z = -8 - 8i$
(C) $z = -32i$
(D) $z = 16$
(E) $z = 8i$

Ejercicio 2

Sea $x(t)$ la solución a la ecuación diferencial

$$\begin{cases} (1+t^2)x'(t) = x(t) \\ x(0) = 2 \end{cases} .$$

Indicar la opción correcta:

(A) $x(1) = 2e^{\pi/2}$
(B) $x(1) = 2e^{\pi/4}$
(C) $x(1) = e^{\pi/4}$
(D) $x(1) = 1$
(E) $x(1) = e^{\pi/2}$

Ejercicio 3

Sea $S = \sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Indicar la opción correcta:

(A) $S = 3$
(B) $S = 4$
(C) $S = 81/64$
(D) $S = 27/16$
(E) $S = 243/256$

Ejercicio 4

Dados α y β reales positivos, se considera la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}(1 + e^{x^2} x^{\beta})}$$

Indicar la opción correcta:

(A) La integral es convergente si $\alpha < 1$, para todo β.
(B) La integral es convergente si y solo si $\alpha < 1$, y $\beta > 1 - \alpha$.
(C) La integral es convergente si y solo si $\alpha < 1$, y $\beta < 1 - \alpha$.
(D) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 1$, y $\beta > 1 - \alpha$.
(E) La integral es convergente si y solo si $\alpha > 1$, y $\beta < 1 - \alpha$.

Ejercicio 5

Considere las funciones definidas por $f(x, y) = (x^4 - 6x^2y^2 + y^4, 4x^3y - 4xy^3)$, $g(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y))$ y la función compuesta $h(x, y) = g(f(x, y))$.

¿Cuál es la matriz de derivadas parciales de h en el punto $(0, 1)$?

Indicar la opción correcta:

(A) $\begin{pmatrix} e\cos(4) & 0 \\ 0 & e\cos(4) \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 0 & 4e \\ -4e & 0 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 0 & 2e \\ -2e & 0 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 0 & 4e \\ 4e & 0 \end{pmatrix}$

(E) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6

Sea $f(x,y,z) = z$ y $D = \{(x,y,z) \in I\!R^3 : y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 2, x^2+y^2 \leq 1\}$.
Entonces $\iiint_D f(x,y,z)dxdydz$ vale: (sugerencia: utilizar coordenadas cilíndricas)

(A) $\frac{3\pi}{2}$
(B) $\frac{\pi}{8}$
(C) $\frac{3\pi}{8}$
(D) $\frac{5\pi}{6}$
(E) $\frac{3\pi}{4}$

Ejercicio 7

Sea V el volumen de la región en $I\!R^3$ definida por $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq x^2+y^2$.
Indicar la opción correcta:

(A) $V = 4/3$
(B) $V = 1/3$
(C) $V = 2/3$
(D) $V = 8/3$
(E) $V = 10/3$

Ejercicio 8

El límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y+2xy^3}{(x^2+y^2)^2}$

(A) Vale 1.
(B) Vale 4.
(C) No existe.
(D) Vale 0.
(E) Vale $+\infty$.

Problema (36 puntos)

Se considera la función $f : I\!R^2 \to I\!R$ definida como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}} + 3x + 2y + 2xy & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ A & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

a) Hallar A para que f sea continua en $(0,0)$.
b) Para el valor de A hallado, estudiar la existencia de derivadas parciales en $(0,0)$.
c) Definir diferenciabilidad de una función $g : I\!R^2 \to I\!R$ en el punto $(0,0)$.
d) Para el valor de A hallado, estudiar la diferenciabilidad de f en el $(0,0)$.