Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2020**

Segundo parcial – Sábado 5 de diciembre de 2020

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

(I) Múltiple opción. Total: 40 puntos

Puntajes: 8 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar y -1.5 si la respuesta es incorrecta.
Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes, con letras mayúsculas imprenta: A, B, C, D o E.

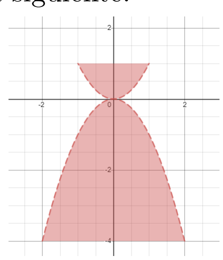
Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5
D	D	B	C	C

Ejercicio 1

Sea $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \ |y| > x^2, \ -4 < y < 1\}$. Entonces $\iint_D (3 - 6xy)\, dxdy$ vale

A) 8
B) 16
C) 22
D) 36
E) 48

Solución: Observar que la región D es la siguiente:



De donde se ve claramente que si $0 \leq y < 1$ entonces $-\sqrt{y} < x < \sqrt{y}$ y si $-4 < y < 0$ entonces $-\sqrt{-y} < x < \sqrt{-y}$. Por lo que

$$\begin{aligned}
\iint_D (3 - 6xy)dxdy &= \int_{-4}^{0}\int_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{-y}} (3 - 6xy)dxdy + \int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} (3 - 6xy)dxdy \\
&= \int_{-4}^{0} (3x - 3x^2y)\Big|_{-\sqrt{-y}}^{\sqrt{-y}} dy + \int_0^1 (3x - 3x^2y)\Big|_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dy \\
&= \int_{-4}^{0} 6\sqrt{-y}dy + \int_0^1 6\sqrt{y}dy \\
&= \int_0^4 6\sqrt{y}dy + 4y^{3/2}\Big|_0^1 = 4y^{3/2}\Big|_0^4 + 4 \\
&= 32 + 4 = 36
\end{aligned}$$

Respuesta: **D**.

Ejercicio 2

Sean f y g las dos funciones de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}$ definidas como sigue:

$$f(x,y)=\frac{x^4-y^4+x^6}{(x^2+y^2)^2} \qquad g(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^3-y^3} & \text{si } x\neq y \\ 0 & \text{si } x=y \end{cases}$$

Considere los límites $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, y $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$. Entonces:

A) Ambos límites existen y son 0.

B) El límite de $f(x,y)$ existe y es 0, pero el límite de $g(x,y)$ no existe.

C) El límite de $g(x,y)$ existe y es 0, pero el límite de $f(x,y)$ no existe.

D) No existen ninguno de los dos límites.

E) Ambos límites existen, pero no son 0.

Solución:

Empecemos con el límite de f.

Observar que si $x\neq 0$ entonces $f(x,0)=1+x^2$ y si $y\neq 0$ tenemos $f(0,y)=-1$. Por lo tanto, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ no existe, ya que en cada eje el límite da distinto.

Veamos ahora que pasa para g.

Si nos consideramos la curva $y=x+x^2$, tenemos que $g(x,x+x^2)=\frac{x^4+2x^5+x^6}{-3x^4-3x^5-x^6}$, por lo tanto si nos consideramos el límite de g a lo largo de esa curva con x tenndiendo a 0, tenemos que g tiende a $-1/3$. Por otra parte, $g(x,x)=0$ por lo que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)$ no existe.

Respuesta: **D**.

Ejercicio 3

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ una función que cumple:

$$f(x,x^2)=1,\ \forall x\neq 0, \qquad f(x,0)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}, \qquad f(0,y)=0,\ \forall y\in\mathbb{R}.$$

Seleccione la opción correcta.

A) f no es continua en $(0,0)$ y en consecuencia no existe ninguna derivada direccional en $(0,0)$

B) Las derivadas parciales de f en $(0,0)$ existen pero f no es diferenciable.

C) Se verifican las hipótesis de la condición suficiente de diferenciabilildad, luego f es diferenciable

D) f es diferenciable, aunque no se verifica la condición suficiente de diferenciabilildad.

E) Ninguna de las opciones anteriores es correcta.

Solución:

Observar que de las condiciones que cumple f, obtenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Por lo tanto, f no es continua en $(0,0)$ y por ende, tampoco diferenciable.

La condición $f(x,0)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ implica que $f_x(0,0)=0$ y análogamente $f(0,y)=0$, $\forall y\in\mathbb{R}$ implica que $f_y(0,0)$. Por lo que ambas derivadas parciales existen en $(0,0)$.

Respuesta: **B**.

Ejercicio 4

Hallar la integral de la función $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}$ en el conjunto
$D=\{(x,y,z)\in I\!R^3 : 0\le z\le 1, y\ge 0, x^2+y^2\le 2x\}$.

A) $\frac{8}{3}$
B) $\frac{2\pi}{3}$
C) $\frac{16}{9}$
D) $\frac{9}{2}$
E) 8

Solución:

Bien, observar que la ecuación $x^2+y^2=2x$ es la ecuación de la circunferencia de radio 1 y centro $(1,0)$. Además la intersección entre esta circunferencia y una recta que pasa por el origen ($y=mx$) es el conjunto $\left\{(0,0),\left(\dfrac{2}{1+m^2},\dfrac{2m}{1+m^2}\right)\right\}$.
Por lo tanto, si consideramos coordenadas cilíndricas, tenemos que la preimagen de D es el conjunto $\{(\rho,\theta,z)\in I\!R^3 : 0\le z\le 1, 0\le\theta\le\pi/2, 0\le\rho\le 2cos(\theta)\}$.
Entonces,

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz=\int_0^1\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos(\theta)}\rho^2 d\rho d\theta dz=\frac{8}{3}\int_0^1\int_0^{\pi/2}\cos^3(\theta)d\theta dz=\frac{16}{9}\int_0^1 dz=\frac{16}{9}$$

Respuesta: **C**.

Ejercicio 5

Sean $f: I\!R^2\to I\!R^2$ y $g: I\!R^2\to I\!R^2$ dos funciones diferenciables. Se sabe que $f(x,y)=\left(\frac{x}{2}+\frac{y^2}{4}-x^3+\frac{3}{4}, xy+\frac{y^4}{2}\right)$, y que:

$$J_g\left(1,\tfrac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}2 & \pi\\ 0 & 3\end{pmatrix}\qquad,\qquad J_g(0,1)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ e & 2\end{pmatrix}.$$

Sea $h=g\circ f$. Entonces la matriz Jacobiana de h en el punto $(0,1)$ es:

A) $J_h(0,1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 2\end{pmatrix}$
B) $J_h(0,1)=\begin{pmatrix}1 & \frac{\pi}{2}+3\\ 2 & \frac{\pi}{2}-3\end{pmatrix}$
C) $J_h(0,1)=\begin{pmatrix}1+\pi & 1+2\pi\\ 3 & 6\end{pmatrix}$
D) $J_h(0,1)=\begin{pmatrix}\frac{1+e}{2} & 1\\ 1+2e & 4\end{pmatrix}$
E) $J_h(0,1)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{e}{2}+2 & \frac{e}{2}+4\end{pmatrix}$

Solución:

Primero que nada recordar que si $h=g\circ f$ entonces $J_h(1,0)=J_g(f(1,0))J_f(1,0)$. Observar que $f(1,0)=(1,1/2)$ y falta hallar $J_f(1,0)$.
Es fácil ver que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\frac{1}{2}-3x\qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{1}{2}y$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=y\qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=x+2y$$

Por lo que $J_f(1,0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y por tanto

$$J_h(1,0) = J_g(1,1/2)J_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & \pi \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\pi & 1+2\pi \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Respuesta: **C**.

(II) Desarrollo. Total: 20 puntos. Justifique sus respuestas.

Problema 1

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

1. Definir continuidad de f en un punto.

   Solución: Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en un punto a sii $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a,\delta)) \subset B(f(a),\varepsilon)$.
2. Definir diferenciabilidad de f en un punto.

   Solución: f es diferenciable en (a,b) sii existen dos reales A, B tales que

   $$f(a + A\Delta x, b + B\Delta y) = f(a,b) + A\Delta x + B\Delta y + r(\Delta x, \Delta y)$$

   con $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función que cumple $\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{r(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0$.
3. Definir derivadas parciales y direccionales de f en un punto.

   Solución: Se defina la derivada direccional de f respecto al vector dirección v en el punto a como el siguiente límite, si existe:

   $$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hv) - f(a)}{h}$$

   Las derivadas parciales son las derivadas direccionales según las direcciones $(1,0)$ y $(0,1)$.

Demostrar que si f es diferenciable en el punto (a,b), entonces:

4. f es continua en (a,b).

   Solución: Si f es diferenciable en (a,b) entonces existen dos reales A, B tales que

   $$f(a + A\Delta x, b + B\Delta y) = f(a,b) + A\Delta x + B\Delta y + r(\Delta x, \Delta y)$$

   por lo tanto, si tomamos límite con $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$, tenemos

   $$\begin{aligned} \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(a + A\Delta x, b + B\Delta y) &= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(a,b) + A\Delta x + B\Delta y + r(\Delta x, \Delta y) \\ &= f(a,b) + \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} A\Delta x + B\Delta y + r(\Delta x, \Delta y) \\ &= f(a,b) \end{aligned}$$

   por lo que f es continua en (a,b).
5. Existen las derivadas parciales de f en (a,b).

   Solución: Si planteamos la definición de derivada parcial tenemos

   $$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) &= \lim_{(h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} \\ &= \lim_{(h\to 0} \frac{Ah + r(h,0)}{h} \\ &= A + \lim_{(h\to 0} \frac{r(h,0)}{h} \\ &= A \end{aligned}$$

Problema 2

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2}) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

1. Estudiar la continuidad de f en el origen.

   Solución: Para estudiar la continuidad en el origen, nos conviene pasar a polares, así tenemos que estudiar el siguiente límite

   $$\lim_{\rho \to 0} \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \rho^2 \operatorname{sen}(1/\rho^2)$$

   pero observar que $1 \leq \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \leq 1$ por lo tanto como $\rho^2 \operatorname{sen}(1/\rho^2)$ tiende a cero (por ser $\operatorname{sen}(1/\rho^2)$ acotado), tenemos que el límite anterior es cero. Por lo tanto, f es continua en el origen.

2. Estudiar las derivadas parciales de f en el orgien.

   Solución Observar que $f(x,0) = 0 = f(0,y)$, por lo tanto las derivadas parciales existen en el origen y son nulas.

3. Estudiar la diferenciabilidad de f en el origen.

   Solución: Pasando a polares se puede ver que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$. Por lo tanto, por ser $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$ acotado, tenemos

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0,$$

   es decir f es diferenciable en el origen. Basta tomar $A = 0 = B$ y $r(x,y) = xy \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)$

4. Estudiar si las derivadas parciales son continuas en el origen.

   Solución: Veamos que las derivadas parciales no son continuas en $(0,0)$. Observar que como la formula de f es simétrica, basta probarlo para una sola, por ejemplo f_x.

   Si $(x,y) \neq (0,0)$ tenemos

   $$f_x(x,y) = y \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) - \frac{2x^2 y}{(x^2+y^2)^2} \cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right).$$

   Observar que si nos movemos por la recta $x = y$, tenemos

   $$\lim_{x\to 0} f_x(x,x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \frac{2x^3}{x^4} \cos\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \pm\infty,$$

   por lo tanto la derivada parcial f_x no es continua en $(0,0)$.