Solución Práctico 9 - Desarrollo de Taylor

Ejercicio 2

a) $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{xy-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{x^2+y^2} = 0$. Basta considerar desarrollo de Taylor de orden 2 en $(0,0)$.

b) $\lim_{(x,y)\to 0} \frac{e^{x^2+y(y+1)}-(1+y+y^2/2)}{x^2+y^2} = 1$. Basta considerar desarrollo de Taylor de orden 2 en $(0,0)$.

Veamos en detalle el caso $a)$:
Sea $f(x,y) = xy - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
f_x(x,y) &= y - \cos(x)\operatorname{sen}(y)\\
f_y(x,y) &= x - \operatorname{sen}(x)\cos(y)\\
f_{xx}(x,y) &= \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)\\
f_{xy}(x,y) &= 1 - \cos(x)\cos(y)\\
f_{yy}(x,y) &= \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $\nabla f(0,0) = (0,0)$ y que la matriz Hessiana de f en $(0,0)$ es la matriz nula. Aplicando el teorema de Taylor tenemos que $f(x,y) = r_2(x,y)$ en un entorno del $(0,0)$. Además, el límite que tenemos que calcular vale 0 por la propiedad del resto.

Ejercicio 3

a) Para $f(x,y) = \arctan(\frac{y}{x^2+1})$, obtenemos $f(x,y) = y - x^2y - \frac{1}{3}y^3 + r_3(x,y)$

b) Para $f(x,y) = e^x\cos(y)$, obtenemos $f(x,y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + r_3(x,y)$

c) Para $f(x,y) = \log(xy+1)$ obtenemos $f(x,y) = xy + r_3(x,y)$

Veamos en detalle el caso $b)$: Sea $f(x,y) = e^x\cos(y)$

$$\begin{array}{llll}
f_x(x,y) = e^x\cos(y) & f_y(x,y) = -e^x\operatorname{sen}(y) & & \\
f_{xx}(x,y) = e^x\cos(y) & f_{xy}(x,y) = -e^x\operatorname{sen}(y) & f_{yy}(x,y) = -e^x\cos(y) & \\
f_{xxx}(x,y) = e^x\cos(y) & f_{xxy}(x,y) = -e^x\operatorname{sen}(y) & f_{xyy}(x,y) = -e^x\cos(y) & f_{yyy} = e^x\operatorname{sen}(y)
\end{array}$$

De donde se sigue que $D_{(0,0)}f(x,y) = x$, $D^2_{(0,0)}f(x,y) = x^2 - y^2$, y $D^3_{(0,0)}f(x,y) = x^3 - 3xy^2$. En conclusión, tenemos que, en un entorno del $(0,0)$, $f(x,y)$ es igual a

$$f(0,0)+D_{(0,0)}f(x,y)+D^2_{(0,0)}f(x,y)+D^3_{(0,0)}f(x,y)+r_3(x,y) = 1+x+\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}+\frac{x^3}{6}-\frac{xy^2}{2}+r_3(x,y)$$

Ejercicio 4

El polinomio de taylor de grado 3 centrado en $(1,0,0)$ de la función $f(x,y,z) = \frac{yz}{x}$ es $T_3(x,y,z) = yz - (x-1)yz$, es decir

$$f(x,y,z) = yz - (x-1)yz + r_3\big((x-1),y,z\big)$$

Recordar que

$$f((1,0,0)+(v_1,v_2,v_3)) = f((1,0,0)) + D_{(1,0,0)}f(v) + \frac{1}{2}D^2_{(1,0,0)}f(v) + \frac{1}{6}D^3_{(1,0,0)}f(v) + r_3(v)$$

Si $(x,y,z) = (1+v_1, v_2, v_3)$, se tiene

$$f(x,y,z) = f((1,0,0)) + D_{(1,0,0)}f(x-1,y,z) + \frac{1}{2}D^2_{(1,0,0)}f(x-1,y,z) + \frac{1}{6}D^3_{(1,0,0)}f(x-1,y,z) + r_3(v)$$

Ejercicio 5

En este ejercicio se plantea escribir a la función $f(x,y) = xyz^2$ en potencias de x, $y-1$, $z+1$. Recordamos que $D^n_p f(x, y-1, z+1)$ es un polinomio de grado n en potencias de x, $y-1$, $z+1$. Por lo tanto, alcanza con escribir el desarrollo de taylor de dicha función centrado en el punto $p = (0,1,-1)$.

Observamos primero que la función f ya es un polinomio, por lo tanto su desarrollo de Taylor se truncará en el orden de dicho polinomio (es decir, dado cualquier polinomio de grado n, las derivadas parciales con orden mayor o igual a $n+1$ de dicho polinomio serán 0). Esto implica que el taylor de orden 3 de dicha función tiene que coincidir con la función f, o en otras palabras, simplemente reescribiremos la función f ordenando los términos de forma distinta.

Un camino es simplemente calcular las derivadas parciales y hallar $D^n_p(x, y-1, z+1)$ para $n = 1,2,3$ y de esta forma

$$f(x,y,z) = f(p) + D_p f(x,y-1,z+1) + \frac{1}{2}D^2_p f(x,y-1,z+1) + \frac{1}{3!}D^3_p f(x,y-1,z+1)$$

Sin embargo, el camino más rápido es usar el ejercicio 1: La función $f(x,y,z)$ es el producto de las funciones de una variable $g_1(x) = x$, $g_2(y) = y$ y $g_3(z) = z^2$. Por lo tanto, el Taylor buscado lo conseguimos multiplicando los desarrollo de Taylor de orden 3 de cada una de estas funciones centrados en los puntos correspondientes $(x = 0, y = 1, z = -1)$. Tenemos

$$g_1(x) = x, \qquad g_2(y) = 1 + (y-1), \qquad g_3(z) = (-1 + (z+1))^2$$

Entonces

$$f(x,y,z) = x + x(y-1) - 2x(z+1) - 2x(y-1)(z+1) + x(z+1)^2 + x(y-1)(z+1)^2$$