Práctico 4 – Series

1. Indicar si las siguientes series son convergentes o no, hallando sus suma en caso de serlo.

$$a)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{n+3} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{+\infty}5^{n+1} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{n(n+3)}$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\log\left(\frac{n^2+2n+1}{n^2}\right) \qquad f)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} \qquad g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\ \mathrm{arc\,tg}\,(n+1)-(n+1)\ \mathrm{arc\,tg}\,(n)}{n(n+1)}$$

Solución: Recordar la siguiente igualdad (usada para calcular las series geométricas):

$$\sum_{n=k}^{n=k+l} r^n = \frac{r^k - r^{k+l+1}}{1-r}, \qquad r \neq 1$$

a) **Converge** a $\frac{3}{2}$
b) **Converge** a $\frac{1/9}{1-1/\sqrt{3}}$
c) **Diverge** a $+\infty$
d) **Converge** a $\frac{11}{6}$
e) **Diverge** a $+\infty$
f) **Converge** a $\frac{1}{4}$
g) **Converge** a $\frac{-\pi}{4}$

Veamos con detalle el ejercicio **1f**. La serie a estudiar es

$$\sum_{1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

Intentaremos imitar la estrategia del cálculo de la serie $\sum \frac{1}{n(n+1)}$, en donde escribimos a la serie como una serie telescópica (ver notas). Queremos escribir al término general como suma de tres factores:

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{a}{n+1} + \frac{b}{n+2} + \frac{c}{n+3}$$

Esto genera el sistema

$$\begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 5a+4b+3c &= 1 \\ 6a+3b+2c &= 0 \end{cases}$$

Cuyas soluciones son

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 2, \quad c = -\frac{3}{2}$$

Por lo tanto,

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{-1}{2(n+1)} + \frac{2}{n+2} + \frac{-3}{2(n+3)}$$

$$= \frac{-1}{2(n+1)} + \frac{4}{2(n+2)} + \frac{-3}{2(n+3)}$$
$$= \left(\frac{-1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\right) + \left(\frac{3}{2(n+2)} + \frac{-3}{2(n+3)}\right)$$

Si llamamos $x_n = \frac{1}{2n}$, obtenemos que

$$\frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = (-x_{n+1} + x_{n+2}) + (3x_{n+2} - 3x_{n+3})$$

Por lo que la serie, se vuelve la suma de dos series telescópicas:

$$\sum_{1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n\to+\infty} -x_2 + x_{n+2} + 3x_3 - 3x_{n+3} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

2. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio de comparación.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$$

Solución: Criterio de comparación:

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *series de términos positivos, tales que* $a_n \leq b_n$ *para todo* $n > n_0$*. Entonces:*

- *Si* $\sum b_n$ *converge,* $\sum a_n$ *también.*
- *Si* $\sum a_n$ *diverge,* $\sum b_n$ *también.*

a) $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ **converge**, pues $\frac{1}{n^n} < \frac{1}{n^2}$ para $n \geq 2$ y $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

b) $\sum_1^{+\infty} e^{-\sqrt{n+1}}$ **converge**, pues a partir de cierto N también $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n^2}$

Probemos la última afirmación de b): $\frac{1}{e^{\sqrt{n}}} \leq \frac{1}{n^2}$:

La desigualdad es cierta si y solo si $\frac{e^{\sqrt{n}}}{n^2} \geq 1$. Para probarla, estudiamos la función $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2}$.

Se tiene que a partir de cierto $K > 0$, si $x > K$, $f(x) > 1$. Para probar esto, vemos que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

Pues si consideramos el cambio de variable $u = \sqrt{x}$,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x^2} = \lim_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u^4} = +\infty$$

(La última igualdad se justifica con la regla de l'Hôpital).

Por último, el hecho de que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, implica que a partir de un cierto K, $f(x) > 1$ y por lo tanto, a partir del próximo natural N mayor que K se verifica que $f(n) > 1$ para todo $n > N$, que es lo que queríamos probar.

3. Determinar si las siguientes series son convergentes o divergentes aplicando el criterio del equivalente.

$$a) \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3} \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log(n)}{10n+1}$$

Solución: Criterio de equivalentes:

Sean $\sum a_n$ *y* $\sum b_n$ *series de términos positivos.*

- *Si* $\lim \frac{a_n}{b_n} = L > 0$, *entonces ambas sucesiones son de la misma clase (equivalentes)*
- *Si* $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$ *y* $\sum b_n$ *converge, entonces* $\sum a_n$ *también.*

a) $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ **converge**. Es equivalente a $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

b) $\sum_1^{+\infty} \frac{n^2+1}{n^3}$ **diverge**. Equivalente a $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n}$

c) $\sum_1^{+\infty} \frac{log(n+1)-log(n)}{10n+1}$ **converge**. Equivalente a $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

4. Usar el criterio del cociente para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Solución:Criterio del cociente:

Sea a_n *una serie de términos positivos tal que* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$. *Entonces:*

- *Si* $L < 1$, $\sum a_n$ *converge.*
- *Si* $L > 1$, $\sum b_n$ *diverge.*

a) **Converge**

b) **Converge**

Veamos en detalle el **4b**: $\sum \frac{n!}{n^n}$

$$\lim \frac{a_n + 1}{a_n} = \lim \left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)\left(\frac{n^n}{n!}\right) = \lim \frac{(n+1)}{(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$
$$= \lim \left(1 + 1/n\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1$$

5. Usar el criterio de la raíz para estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$$

Solución: Criterio de la raíz:

Sea a_n *una serie de términos positivos tal que* $\lim a_n^{1/n} = L$. *Entonces:*

- *Si* $L < 1$, $\sum a_n$ *converge.*
- *Si* $L > 1$, $\sum b_n$ *diverge.*

a) **Converge**

b) **Converge**

6. Sabiendo que $a_n \geq 0$ y que $\sum a_n$ converge, indicar si las siguientes series son convergentes o no, explicando por qué.

$$a) \quad \sum \frac{1}{a_n} \qquad b) \quad \sum a_n^2 \qquad c) \quad \sum \sqrt{a_n} \qquad d) \quad \sum \log(1 + a_n)$$

Solución: Sabemos que para todo n $a_n \geq 0$ y que $\sum_1^{+\infty} a_n$ converge.

a) $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ **diverge**, porque el término general tiende a $+\infty$.

b) $\sum_1^{+\infty} a_n^2$ **converge**, por criterio de comparación: a partir de cierto N, $a_n < 1$ y por lo tanto (a partir de ese N) $a_n^2 < a_n$.

c) No se puede afirmar nada sobre $\sum_1^{+\infty} \sqrt{a_n}$. Veamos dos ejemplos con comportamientos distintos:
Si $a_n = \frac{1}{n^2}$, $\sum_1^{+\infty} \sqrt{a_n}$ diverge.
Si $a_n = \frac{1}{n^4}$, $\sum_1^{+\infty} \sqrt{a_n}$ converge.

d) $\sum_1^{+\infty} log(1 + a_n)$ **converge** por criterio de equivalentes: la serie es equivalente a $\sum_1^{+\infty} a_n$.

7. Estudiar la convergencia de las siguientes series alternadas. En caso de que sean convergentes, estudiar si también lo son absolutamente.

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2+1}$$

$$c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{6n-5} \qquad d) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n (n^3+2n^2+8n+5)}{n^5+4n^3+15}$$

Solución: Si a_n es una serie monótona decreciente que tiende a 0, entonces la serie alternada $\sum(-1)^n a_n$ es convergente.

a) **Converge absolutamente**, y por lo tanto converge.

b) **Converge**, pero no absolutamente.

c) **No converge** ni converge absolutamente.

d) **Converge absolutamente**, y por lo tanto converge.

8. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)} \qquad b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)\log(n+1)} \qquad c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{e^n} \qquad d) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

Solución:

a) **Diverge**, por equivalencia con $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n}$

b) **Diverge**, por comparación con $\sum_1^{+\infty} \frac{1}{n+1}$

c) **Converge**, por criterio de la raíz.

d) **Converge**, por criterio de Leibnitz.

9. Sea R un rectángulo de lado 1. Se trazan lineas de forma de dividir R en 9 rectángulos iguales de lado $\frac{1}{3}$, y se pinta el rectángulo del centro. Inductivamente, se divide cada rectángulo sin pintar en 9 rectángulos y se pinta el del centro.

- Calcular el área pintada luego de realizar el procedimiento n veces.
- Calcular el área pintada luego de realizar el procedimiento infinitas veces.

Realice el mismo tipo de estudio pero ahora con el perímetro del área pintada.

Solución: Intentaremos calcular primero cuánto se pinta en el paso n, para luego sumar lo pintado en todos los pasos (calcular la serie). Luego, haremos lo mismo con el perímetro.

Observamos lo siguiente:

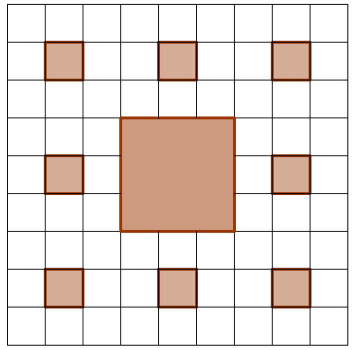

Figura 1: Figura que se obtiene en el paso 2.

	Lado cuadrado	Área del cuadrado	Cantidad de cuadrados
Paso 1	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	1
Paso 2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	8
Paso 3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^6$	8^2
$\vdots$			
Paso n	$\left(\frac{1}{3}\right)^n$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$	8^{n-1}

Por lo tanto, en la etapa n se pinta un área a_n, donde

$$a_n = 8^{n-1}\frac{1}{3^{2n}} = 8^{n-1}\frac{1}{9^n}$$

Sumando las áreas obtenemos que el área total A es

$$A = \sum_{1}^{+\infty} a_n = \sum_{1}^{+\infty} 8^{n-1}\frac{1}{9^n} = \frac{1}{8}\sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{8}\left(\frac{8/9}{1-8/9}\right) = 1$$

Para calcular el perímetro, observar que en la etapa n la suma de los perímetros que se agregan es p_n, donde

$$p_n = 8^{n-1}\frac{4}{3^n}$$

Por lo que el perímetro total P es

$$P = \sum_{1}^{+\infty} p_n = \sum_{1}^{+\infty} 8^{n-1}\frac{4}{3^n} = \frac{4}{8}\sum_{1}^{+\infty}\left(\frac{8}{3}\right)^n = +\infty$$

Nota: Si bien parece poco intuitivo que por un lado estemos pintando un área igual al área total del cuadrado (en términos de medida, podríamos decir que pintamos "todo" el cuadrado) pero que al mismo tiempo el conjunto pintado tenga un perímetro infinito, no está alejado de la realidad. De hecho, en la naturaleza se da algo similar en cuestiones de volúmenes y superficies, por ejemplo en órganos como el intestino delgado, cuyas rugosidades generan una superficie de absorción de unos $250m^2$*. A su vez, este problema pone en evidencia que medir longitudes no resulta siempre intuitivo (buscar Coastline paradox, o paradoja de la línea de costa).*

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Primer parcial segundo semestre 2022***) Considere las siguientes afirmaciones sobre series:

   (1) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ es convergente.

   (2) La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$ es absolutamente convergente.

   (3) La serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\log(2)\cdot\log(3)\cdot\log(4)\cdots\log(n)}{n!}$ es convergente.

   Entonces:

   (A) Solamente las afirmaciones (1) y (2) son verdaderas.
   (B) Solamente las afirmaciones (2) y (3) son verdaderas.
   (C) Todas las afirmaciones son verdaderas.
   (D) Solamente la afirmación (2) es verdadera.
   (E) Solamente las afirmaciones (1) y (3) son verdaderas.

2. (***Primer parcial segundo semestre 2021***) La serie

   $$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^n}+e^{-(n+1)^2}-e^{-n^2}\right)$$

   (A) converge a $\frac{3}{2}$.

   (B) converge a $\frac{1}{2}$.

   (C) converge a 1.

   (D) converge a $3-e$.

   (E) diverge.

3. (***Primer parcial segundo semestre 2020 turno matutino***) Sea a_n una sucesión de términos positivos tal que $\sum a_n$ es convergente. Considere las siguientes series

   $$\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n^2}-1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\cos(a_n)\,\mathrm{sen}(a_n)$$

   Entonces:

   (A) Ambas series son divergentes.
   (B) Ambas series son convergentes.
   (C) Solo la primera serie es convergente.
   (D) Solo la segunda serie es convergente.
   (E) La segunda serie no se puede clasificar a priori, por no ser de signo constante.

4. (***Primer parcial segundo semestre 2019***)

   (1) Probar que si $\sum a_n$ es convergente entonces $\lim\limits_{n} a_n = 0$.

   (2) Enunciar y probar el criterio del cociente.

   (3) Clasificar

   $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+5n+1}{\pi n^3+2n}$$

(4) Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

5. (***Primer parcial primer semestre 2018***) Una pelota de goma se deja caer desde una altura de 2 metros. Cada vez que toca el piso rebota y se eleva hasta una altura de $2/3$ de la distancia desde la que cae.

   Interpretando la distancia que recorre la pelota luego de infinitos rebotes como suma de una serie infinita, indicar la opción correcta.

   (A) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 4 metros.
   (B) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 6 metros.
   (C) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 8 metros.
   (D) Luego de infinitos rebotes la pelota recorre 10 metros.
   (E) Para rebotar infinitas veces la pelota debe recorrer una distancia infinita (i.e. la serie no converge).