**Facultad de Ingeniería**
**IMERL**
**MATEMÁTICA DISCRETA I**
**Curso 2022**

# 1. Inducción Completa (Secciones 4.1, 4.2 y 4.5)

**Ejercicio 1**
Probar que el Principio de Inducción Completa implica el Buen Orden de los números naturales.

**Ejercicio 2**
Probar de dos formas distintas que $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo natural $n$.

**Ejercicio 3**
Probar que $2^n \geq n^2$ a partir de cierto natural $n_0$ que se debe encontrar.

**Ejercicio 4**
Probar que $7^n - 2^n$ es múltiplo de 5 para todo natural $n$.

**Ejercicio 5**
Encontrar el primer natural tal que él y sus siguientes se descomponen en sumas de treses y cincos.

**Ejercicio 6**
Probar que la suma de los cubos de tres enteros consecutivos siempre es múltiplo de 9.

**Ejercicio 7**
Considere un tablero cuadriculado de $2^n$ cuadrados por lado al cual le falta un cuadradito en algún lugar. Demuestre que se puede cubrir dicho tablero con piezas en forma de L formadas por 3 cuadraditos.

**Ejercicio 8 (Examen Diciembre 2009)**

Demostrar que si $a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2} + a_{n-3}\ \forall n \geq 4$ y $a_1 = 3, a_2 = 10, a_3 = 30$ entonces $a_n \geq 3^n,\ \forall n \geq 1$.

**Ejercicio 9**
Probar que todo entero mayor que 1 se descompone en factores primos.

## 2. Combinatoria (Secciones 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4)

**Ejercicio 1**
Dados $A = \{1, 2, \ldots, m\}$ y $B = \{1, 2, \ldots, n\}$, contar la cantidad de funciones $f : A \to B$ tales que:

(a) No hay restricciones.

(b) $f$ es inyectiva.

(c) $f$ es biyectiva

(d) $f$ es monótona creciente estrictamente.

(e) $f$ es monótona creciente.

(f) Cada elemento $i \in B$ es alcanzado $r_i$ veces, donde $r_1 + \ldots + r_n = m$.

*Nota: vamos a contar funciones sobreyectivas usando el Principio de Inclusión-Exclusión.*

**Ejercicio 2**

(a) ¿Cuántos resultados diferentes se pueden obtener al arrojar 3 dados idénticos?

(b) ¿Cuántas fichas diferentes hay en el juego del dominó?

(c) ¿Cuántos recorridos diferentes puede realizar una torre de ajedrez para desplazarse desde la esquina inferior izquierda hasta la esquina superior derecha, admitiendo únicamente movimientos hacia arriba o hacia la derecha?

**Ejercicio 3**
Hallar la cantidad de maneras de distribuir $r$ pelotas idénticas en $n$ cajas diferentes.

**Ejercicio 4**
Probar que el coeficiente en $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r}$ de $(x_1 + x_2 + \ldots + x_r)^n$ es $PR^n_{(n_1,\ldots,n_r)} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_r!}$, donde los exponentes son naturales tales que $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$.

**Ejercicio 5**
Contar la cantidad de subconjuntos de un conjunto de $n$ elementos usando la Regla del Producto.
Obtener el mismo resultado mediante la fórmula del Binomio.

**Ejercicio 6**
En una prueba que consta de 10 preguntas, un estudiante decide responder solo 6 con al menos 3 preguntas elegidas entre las 5 primeras. ¿De cuántas formas distintas podría hacerlo?

**Ejercicio 7 (Primer Parcial 2009)**
¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?
Considere que usamos 5 vocales y 22 consonantes.

**Ejercicio 8**
Hallar la cantidad de palabras distintas que pueden obtenerse permuntando las letras de la palabra $ALGORITMO$, con o sin sentido. Por ejemplo, $LOGARITMO$ y $RITMOALGO$ cuentan.

**Ejercicio 9**
Contar la cantidad de naturales menores que cien mil cuyos dígitos suman 7.

**Ejercicio 10**
¿De cuántas formas puede distribuir un maestro 8 bizcochos de chocolate y 7 de crema entre 3 estudiantes, si cada uno desea al menos un bizcocho de cada tipo?

**Ejercicio 11**

(a) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 niños en 12 sillas puestas en línea?

(b) Ídem pero los niños no deben quedar sentados uno junto al otro.

**Ejercicio 12**
En una playa se juntan 13 personas que deciden hacer 4 equipos para jugar al voleibol. Para ello, deciden hacer tres equipos de 3 integrantes y uno de 4. Entre las 13 personas hay una sumamente habilidosa y otra que es principiante; las restantes 11 personas tienen un nivel intermedio. Para equiparar, la persona habilidosa es asignada en uno de los equipos de 3 y la principiante en el equipo de 4. Probar que en estas condiciones existen 46200 posibles formas de armar los equipos.

**Ejercicio 13**

(a) Hallar el coeficiente en $x^5$ en el desarrollo de $(x^5 + x - 1)^{10}$.

(b) Hallar el coeficiente en $xy^3z^5$ del polinomio $(2x + 4y + 2z + 5)^{14}$

**Ejercicio 14**
Probar que para todo $n$ y $m$ naturales vale:

(a) $n^m = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Sob(m, i)$.

(b) $Sob(m + 1, n) = n(Sob(m, n - 1) + Sob(m, n))$.

(c) $S(m + 1, n) = S(m, n - 1) + nS(m, n)$.

(d) $Sob(m, n) = \sum_{i=1}^{m-(n-1)} \binom{m}{i} Sob(m - i, n - 1)$.

(e) $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{N-k}{n-i} = \binom{N}{n}$, siendo $k \leq n \leq N$.

(f) $n! = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{k} d_k$, donde $d_0 = 1$ y $d_k$ es el número de desórdenes de tamaño $k$.

*Nota: vamos a contar desórdenes de tanaño $k$ mediante el Principio de Inclusión-Exclusión.*

**Ejercicio 15 (Primer Parcial 2016)**
Juan quiere guardar 10 libros diferentes en 7 estantes vacíos diferentes y quiere que al menos 5 de ellos posean un libro. ¿De cuántas maneras puede realizar esta tarea?

(a) $Sob(10, 7) + Sob(10, 6)\binom{7}{6} + Sob(10, 5)\binom{7}{5}$ .

(b) $CR_5^7$.

(c) $CR_7^5$.

(d) $S(10, 7) + S(10, 6)\binom{7}{6} + S(10, 5)\binom{7}{5}$.

(e) $Sob(10, 7) + Sob(10, 6) + Sob(10, 5)$.

## 3. Principio del Palomar y de Inclusión-Exclusión

### Principio de Inclusión-Exclusión (Secciones 8.1 a 8.3)

**Ejercicio 1**

(a) ¿Cuántos enteros entre 1 y 105 inclusive no son divisibles por ninguno de los enteros 3, 5, 7?

(b) ¿Cuántos enteros entre 1 y 1155 inclusive son múltiplos de 3 pero no de 5,7 ni 11?

**Ejercicio 2**
De 100 estudiantes, 32 estudian matemática, 20 física, 45 biología, 15 matemática y biología, 7 matemática y física, 10 física y biología, 30 no estudian ninguna de las tres materias.

(a) Encontrar el número de estudiantes que estudian las tres materias.

(b) Encontrar el número de estudiantes que estudian exactamente una de las tres materias.

**Ejercicio 3**
Hallar la cantidad de soluciones naturales de la ecuación $x_1+x_2+x_3+x_4 = 19$ con las siguientes restricciones:

(a) $0 \leqslant x_i \leqslant 8$ para todo $i$.

(b) $0 \leqslant x_1 \leqslant 5$, $0 \leqslant x_2 \leqslant 6$, $3 \leqslant x_3 \leqslant 7$ y $0 \leqslant x_4 \leqslant 8$.

**Ejercicio 4 (Examen de diciembre de 2009)**
Se tira un dado 6 veces. Calcular la cantidad de formas en que podemos obtener un número múltiplo de 18 como suma de las 6 tiradas del dado.

**Ejercicio 5**
Calcular cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

(a) Ningún dígito está en su posición original.

(b) Los pares no están en su posición original.

(c) Los pares no están en su posición original y la secuencia debe empezar con los dígitos 1, 2, 3, 4 en algún orden.

**Ejercicio 6**
¿De cuántas formas pueden extraerse 9 canicas de una bolsa si hay 3 de cada uno de los siguientes colores: blanco, rojo, azul, negro?

**Ejercicio 7**
¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 9.999.999 inclusive tienen a 31 como la suma de sus dígitos?

**Ejercicio 8**
¿Cuántas palabras de 4 letras pueden formarse usando las letras A,B,C,D,E si debe aparecer al menos una vocal?

## Principio del Palomar (Sección 5.5)

**Ejercicio 9**
Probar que entre 100000 personas hay al menos dos que nacieron al mismo tiempo (hora, minuto y segundo).

**Ejercicio 10**
Probar que al menos uno de $m$ enteros consecutivos es divisible por $m$.

**Ejercicio 11**
Probar que cualquier subconjunto de seis elementos del conjunto $S = \{1, 2, \ldots, 9\}$ debe contener dos elementos cuya suma sea 10.

**Ejercicio 12**
Probar que toda función $f : A \to B$ donde $|A| > |B|$ tiene al menos $\lceil |A| \,/\, |B| \rceil$ elementos de $A$ que toman el mismo valor.

**Ejercicio 13**
Hallar el menor entero $n$ tal que todo tablero rectangular cuadriculado de $4 \times n$, con sus cuadrados pintados de dos colores, tenga al menos un rectángulo cuyas cuatro esquinas estén pintadas del mismo color.

**Ejercicio 14**

(a) ¿ Es posible que un caballo de ajedrez comience en una casilla y vuelva a la misma con una cantidad impar de saltos? *Sugerencia: pensar en el tablero.*

(b) Determinar la mayor cantidad de caballos que se pueden poner en un tablero de ajedrez sin que ninguno pueda saltar hacia la posición de otro.

**Ejercicio 15**
Dados cinco punto de un cuadrado de lado 2, probar que deben haber dos que estén a distancia menor o igual que $\sqrt{2}$.

**Ejercicio 16**
Se consideran $n$ puntos en un triángulo equilátero de lado 1. ¿Cuál es el $n$ mínimo que garantiza que al menos dos de los puntos se encuentran a distancia menor o igual que $1/2$? Vale colocar puntos sobre los lados del triángulo. ¿Y si se pidiera que al menos dos puntos estuvieran a distancia menor estricta que $1/2$?

**Ejercicio 17 (Examen Marzo 2003)**
Hallar el menor natural $n$ tal que dados $n$ dígitos diferentes se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados diferirán en un múltiplo de 6.

**Ejercicio 18 (Examen Julio 2004)**
Sea un tablero de 141 filas y 8 columnas. Cada cuadradito del tablero se pinta de blanco o de negro de forma tal que cada fila tenga exactamente cuatro cuadraditos pintados de negro. Demostrar que hay al menos tres filas con igual secuencia de colores.

## 4. Sucesiones y Recurrencias (Secciones 10.1, 10.2 y 10.3)

**Ejercicio 1**
Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $a_{n+1} - \frac{3}{2}a_n = 0, \quad n \geqslant 0.$

(b) $a_n - na_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 1.$

(c) $na_n - (n-1)a_{n-1} = 0, \quad n \geqslant 2.$

(d) $a_n/a_{n-1}^p = 2$, siendo $a_0 = 1$, $p$ positivo diferente de 1.

**Ejercicio 2**
Expresar explícitamente en $n$ las sucesiones:

(a) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, \quad n \geqslant 2,$
con $a_0 = 1, a_1 = 3.$

(b) $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}, \quad n \geqslant 1,$
con $a_0 = 7, a_1 = 3.$

(c) $a_{n+2} + 4a_n = 0, \quad n \geqslant 1,$
con $a_0 = a_1 = 1.$

(d) $a_n - 6a_{n-1} + 9a_{n-2} = 0, \quad n \geqslant 2,$
con $a_0 = 5, a_1 = 12.$

(e) $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3 + 5n, \quad n \geqslant 0.$

(f) $a_n = 2a_{n-1} + n2^n, \quad n \geqslant 1$, con $a_0 = 1$.

(g) $a_{n+2} + ba_{n+1} + ca_n = 0, \quad n \geqslant 0,$
con $a_0 = 0, a_1 = 1$, $a_2 = 4$ y $a_3 = 37$, y siendo $b$ y $c$ constantes desconocidas.

**Ejercicio 3**
Exprese $a_n$ en función de los términos anteriores ($a_k$ con $k \leqslant n-1$) siendo $a_n$:

(a) La cantidad de saludos que se dieron los primeros $n$ invitados de una reunión, si cada vez que llego uno, éste saludo el resto.

(b) El número de secuencias de 0s y 1s de largo $n$ en las cuales no aparecen dos ceros seguidos.

(c) (Exam. marzo 2001) El número de secuencias de $A$s, $B$s y $C$s de largo $n$ en las cuales no aparecen dos $A$s seguidas.

(d) Cantidad de formas de subir una escalera de $n$ escalones si se puede a veces saltar un escalón.

(e) Lo anterior pero sin que se puedan saltar dos veces seguidas un escalón (o sea, que si se saltea un escalón, entonces el siguiente no se saltea).

(f) El número de formas en que una sucesión de unos y doses suman $n$. Por ejemplo, para $n = 3$ serían las sucesiones 111, 12 y 21.

(g) El determinante de la matriz $A$ de $n \times n$ que tiene doses en la diagonal, unos en las diagonales inferior y superior, y cero en el resto de las entradas. ($(A)_{i,j} = 2$ si $i = j$, 1 si $|i - j| = 1$ y 0 en los otros casos).

**Ejercicio 4 (Examen Diciembre 2009)**
Resuelva el siguiente sistema de relaciones de recurrencia:

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} - b_n \\ b_{n+1} = b_n - 3a_{n-1} \\ a_0 = 0,\ b_0 = 2, b_1 = 1 \end{cases}$$

**Ejercicio 5**
Se pretende diseñar una bandera con $n$ franjas horizontales, cada una de las cuales puede ser de color rojo, azul, verde o amarillo. Hallar la cantidad de banderas posibles en cada una de las siguientes situaciones:

(a) No hay restricciones sobre el color de cada franja.
(b) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color.
(c) Dos franjas adyacentes nunca pueden ser del mismo color, como tampoco pueden serlo la primera y la última franjas.

**Ejercicio 6**
Hay $n$ estudiantes formando una fila y cuando suena el silbato cada estudiante puede intercambiar de lugar con su compañero de adelante o de atrás (en caso de que los haya). ¿De cuantas formas diferentes pueden quedar esos $n$ estudiantes luego de haber sonado el silbato?

**Ejercicio 7 (Primer Parcial 2009)**
Si $a_n$ verifica que $a_n - 2a_{n-1} = 3 \times 2^n$, con $a_0 = 1$, entonces:

(a) $a_{50} = 2^{50}$.
(b) $a_{50} = 50 \times 2^{50}$.
(c) $a_{50} = 150 \times 2^{50}$.
(d) $a_{50} = 151 \times 2^{50}$.

**Ejercicio 8 (Examen Diciembre 2008)**
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se considera el número: $a_n = ((\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n)$.

(a) Mostrar que $a_n$ verifica una relación de recurrencia de orden 2, homogénea, a coeficientes constantes.
(b) Probar que $a_n$ es un entero positivo, para todo $n \in \mathbb{N}$.

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 9 (Parcial 2001)**
Se considera la siguiente ecuación:

$$a_n + \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} = 2^n \qquad \text{para todo } n \geqslant 2.$$

Hallar $\alpha$, $\beta$ y $a_{100}$ sabiendo que: $a_0 = 1, a_1 = 5, a_2 = 1$ y $a_3 = 17$.

**Ejercicio 10 (Examen Febrero 2009)**
Para un campeonato de fútbol se tiene una cantidad par de equipos participantes. Se quiere armar la primera fecha (en una fecha todos los equipos juegan exactamente una vez). Sea $a_k$ la cantidad de formas de armar la primera fecha de un campeonato con $2k$ equipos.

(a) Calcular $a_1, a_2, a_3$.
(b) Deducir que $a_{k+1} = (2k+1) \times a_k$.
(c) Probar que $a_k = (2k-1) \times (2k-3) \times ... \times 3 \times 1$, para todo $k \geq 1$.

## 5. Funciones Generatrices (Secciones 9.1, 9.2, 9.5 y 10.4)

**Ejercicio 1**
Encontrar las funciones generatrices para las siguientes sucesiones (por ejemplo en el caso de la sucesión $1, 1, 1, \ldots$ la respuesta pedida es $1/(1-x)$ y no $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ ni $\sum x^i$).

(a) $C_0^6, C_1^6, C_2^6, \ldots, C_6^6, \ldots$
(b) $C_1^6, 2C_2^6, \ldots, 6C_6^6, \ldots$
(c) $1, -1, 1, -1, \ldots$
(d) $0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots$
(e) $0, 0, 0, 3, -3, 3, -3, 3, \ldots$
(f) $1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots$
(g) $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots$
(h) $0, 0, 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, \ldots$
(i) $1, 0, 2, 0, 4, 0, 8, 0, 16, 0, 32, 0, 64, 0, 128, \ldots$
(j) $0, 0, 1, b, a, b^2, a^2, b^3, a^3, b^4, a^4, b^5, a^5, b^6, a^6, b^7, \ldots$

**Ejercicio 2**
Determinar la sucesión generada por cada una de las siguientes funciones generatrices.

(a) $f(x) = (2x-3)^3$
(b) $f(x) = x^3/(1-x)$
(c) $f(x) = x^3/(1-x^2)$
(d) $f(x) = 1/(1+3x)$
(e) $f(x) = 1/(2-x)$
(f) $f(x) = 3x^6 - 9 + 1/(1-x)$

**Ejercicio 3**

(a) Hallar el coeficiente de $x^8$ en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^{10}$.
(b) Para cada $n$ natural, hallar el coeficiente de $x^8$ en $(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots)^n$.
(c) Para cada natural $n$ encuentre los coeficientes de $x^5$, $x^8$ y en general de $x^r$ en $(1 + x + x^2)(1 + x)^n$ para $0 \leq r \leq n+2$, $r \in \mathbb{N}$.
(d) Hallar el coeficiente de $x^{15}$ en las funciones

  (e) $x^3(1-2x)^{10}$.
  (f) $(x^3 - 5x)/(1-x)^3$.
  (g) $(1+x)^4/(1-x)^4$.

**Ejercicio 4**
Obtener una fórmula para la convolución $c_n$ de los siguientes pares de sucesiones:

(a) $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 4; a_n = 0,\ \forall n \geq 5, b_n = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.
(c) $a_n = 1$, si $0 \leq n \leq 3; a_n = 0,\ \forall n \geq 4, b_n = n$, si $0 \leq n \leq 3; b_n = 0,\ \forall n \geq 4$.

**Ejercicio 5**

(a) Hallar las funciones generatrices de $a_n = n^3$ y de $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} i^3$.

(b) Deducir la fórmula $\sum_{i=0}^{n} i^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$.

**Ejercicio 6**
Hallar la función generatriz de $a_n = d_n/n!$ donde $d_n$ denota los desórdenes de tamaño $n$.

**Ejercicio 7**
Verifique que $(1 - x - x^2 - x^3 - x^4 - x^5 - x^6)^{-1}$ es la función generatriz de la cantidad de formas en que podemos obtener un número $n$ como suma de las tiradas de un dado (todas las necesarias).

**Ejercicio 8**
Hallar la función generatriz de la cantidad de formas que tiene un cajero automático de dar $n$ pesos. Los cajeros solo poseen billetes de 100, 200, 500 y 1000 pesos.

# 6. Relaciones (Secciones 5.1, 7.1, 7.2 y 7.4)

**Ejercicio 1**
Determinar si las siguientes relaciones son reflexivas, irreflexivas (o sea que $\forall x, (x, x) \notin R$), simétricas, antisimétricas, asimétricas (o sea que $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \notin R$) o transitivas en $A = \{1, 2, 3, 4\}$:

(a) $R = \{(1, 1),\ (1, 2),\ (2, 1),\ (2, 2),\ (3, 3),\ (3, 4),\ (4, 3),\ (4, 4)\}$.

(b) $R = \{(1, 2),\ (1, 3),\ (1, 4),\ (2, 3),\ (2, 4),\ (3, 4)\}$.

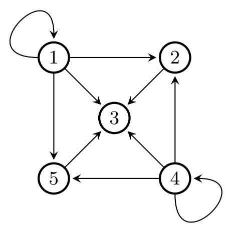
(c) $R = \{(1, 3),\ (1, 1),\ (3, 1),\ (1, 2),\ (3, 3),\ (4, 4)\}$.

(d) $\emptyset$.

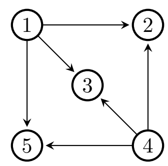
(e) $A \times A$.

(f) Tomar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y las relaciones cuyos grafos dirigidos son:

**i)**



**ii)**



- Las relaciones cuyas matrices son

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 2 (Parcial 2000)**
Hallar el número de relaciones $R$ en el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ que verifican simultáneamente las 3 condiciones siguientes: $R$ es simétrica; $(a, b) \in R$; $(c, c) \in R$. Construir la matriz y el diagrama de flechas (o digrafo) de una de estas relaciones.

**Ejercicio 3**
Sean $R$ y $S$ relaciones en un conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

(a) Elaborar un criterio para decidir si $R$ es o no *simétrica* basándose en la matriz de $R$.

(b) Si $R$ y $S$ son *simétricas*: ¿lo serán también $\overline{R}$, $R^{-1}$, $R \circ S$, $R \cup S$, $R \cap S$?

(c) Ídem a los casos anteriores sustituyendo *simétrica* por *reflexivas, antisimétricas y transitivas.*

**Ejercicio 4**
¿Cuántas relaciones binarias (a) reflexivas, (b) simétricas, (c) antisimétricas son definibles sobre un conjunto con $n$ elementos?

**Ejercicio 5**
En cada uno de los siguientes casos, probar que $R$ es una relación de equivalencia en $A$ y describa el conjunto cociente $A/R$:

(a) $A = \mathbb{Z}$ y $aRb$ si $a^2 = b^2$.

(b) $A = \mathbb{Z}$ y $aRb$ si $a^2$ y $b^2$ dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(c) $A = \mathbb{Z}$ y $aRb$ si $a^4$ y $b^4$ dan el mismo resto al dividirlos por 5.

(d) $A = \mathbb{R}^2$ y $vRw$ si existe $a \in \mathbb{R}$ no nulo tal que $w = av$.

**Ejercicio 6 (Parcial 2019)** Sea $f : A \to B$ una función. Definamos $R_f \subset A \times A$ por $xR_fy \iff f(x) = f(y)$.

(a) Demostrar que $R_f$ es una relación de equivalencia en $A$.

(b) Demostrar que para toda relación de equivalencia $S$ existe una función $f$ tal que $R_f = S$.

**Ejercicio 7**
Sea $n$ un entero positivo. Definamos la relación $\equiv$ en $\mathbb{Z}$, llamada congruencia módulo $n$, en la forma:

$$a \equiv b \text{ si } a - b \text{ es divisible por } n \text{ (o sea que existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tal que } a - b = k.n).$$

(a) Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia.

(b) Demostrar que $a \equiv b \iff a$ y $b$ dan el mismo resto al ser divididos por $n$.

(c) Describir el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ cuando $n = 1, 2, 3$.

(d) Probar que $\mathbb{Z}/\equiv$ tiene $n$ elementos.

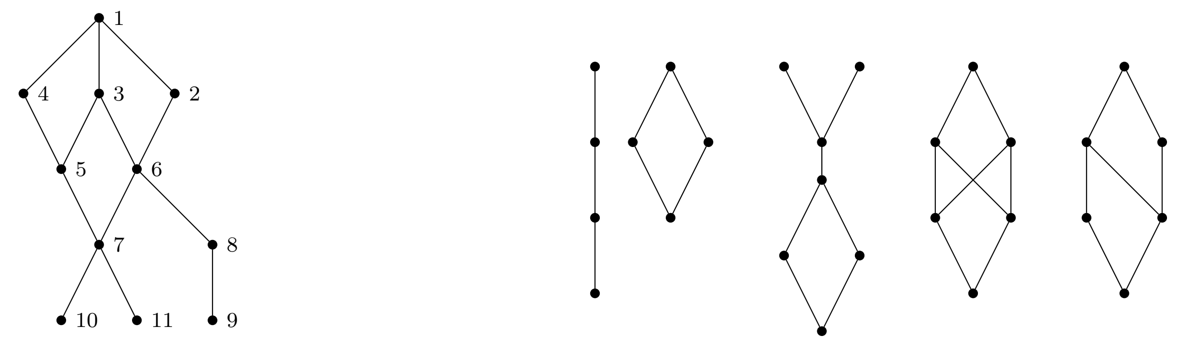
**Ejercicio 8**
Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sea $R_n$ el número de relaciones de equivalencia diferentes que pueden definirse en un conjunto dado con $n$ elementos. Para cada $n, i \in \mathbb{N}$ sea $S(n, i)$ el número de Stirling del segundo tipo. Probar que:

(a) Para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple $R_{n+1} = C_0^n R_n + C_1^n R_{n-1} + \cdots + C_n^n R_0$.

(b) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $R_n = S(n, 1) + S(n, 2) + \cdots + S(n, n)$

# 7. Relaciones de Orden (Sección 7.3)

**Ejercicio 1** Para ensamblar cierto producto hay que realizar las 11 tareas $T_1, T_2, \ldots, T_{11}$ en el siguiente orden parcial cuyo diagrama de Hasse se muestra en la Figura 1 (a). Escriba una lista de instrucciones de




(a) (b)

Figura 1

modo tal que, al ejecutarlas según la lista, el resultado final sea el producto correctamente ensamblado.

**Ejercicio 2** Un empleado de un centro de cómputos, tiene que ejecutar 10 programas $P_0$, $P_1$, …, $P_9$ que, debido a las prioridades, están restringidos a las siguientes condiciones: $P_9 < P_7, P_2$; $P_7 < P_6$; $P_6 < P_4$; $P_2 < P_8, P_5$; $P_5 < P_3, P_0$; $P_8 < P_3, P_4$; $P_3, P_4, P_0 < P_1$; donde, por ejemplo, $P_i < P_j$ significa que el programa $P_i$ debe realizarse antes que el programa $P_j$. Determine un orden de ejecución de estos programas de modo que se satisfagan las restricciones.

**Ejercicio 3** Para cada uno de los órdenes $(A, \leq)$ siguientes, dibuje el diagrama de Hasse.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 12\}$ y $\leq$ es el orden de divisibilidad ($x \leq y$ sii $y$ es múltiplo de $x$).

(b) $A$ es el conjunto de todos los subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$ y $\leq$ es la inclusión $\subseteq$.

**Ejercicio 4** Muestre que en un conjunto con 61 personas, o bien hay una sucesión de 13 personas cada una de las cuales desciende de la siguiente, o bien hay un grupo de 6 personas ninguna de las cuales es descendiente de alguna otra.

**Ejercicio 5** Sea $A = \{a, b, c\}$, calcular la cantidad de relaciones de orden que hay sobre $A$.

**Ejercicio 6** Halle el número de relaciones de orden en $\{1, 2, 3, 4\}$ que contienen a la relación $\{(1, 2), (3, 4)\}$.

**Ejercicio 7** Sea $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$. ¿Qué hay más, relaciones de equivalencia o de orden en $A$?

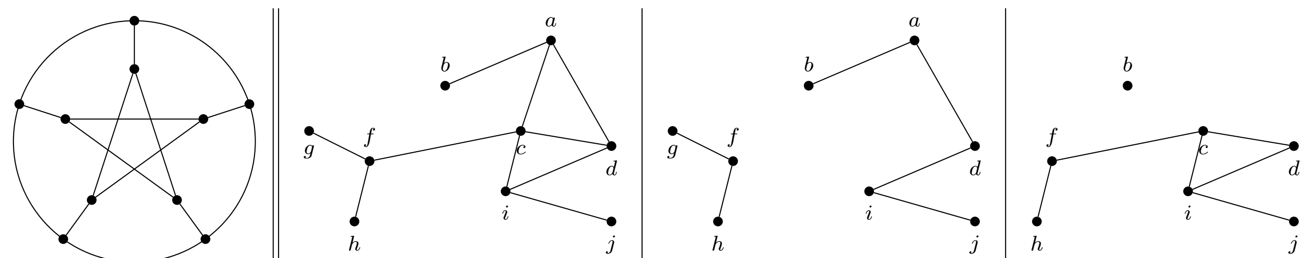
**Ejercicio 8** ¿Cuáles de los diagramas de Hasse de la Figura 1 (b) representa un retículo?

**Ejercicio 9** Demuestre que si $(A, \leq)$ es un retículo y $A$ es finito entonces $A$ tiene mínimo y máximo.

# 8. Teoría de Grafos - Elementos (Secciones 11.1, 11.2 y 12.1)

**Definiciones:** Todos los grafos se supondrán simples, es decir, sin artistas múltiples ni lazos. El grafo *completo* $K_n$ tiene $n$ vértices todos unidos entre sí. El *bipartito completo* $K_{n,m}$ tiene $n+m$ vértices $n$ de los cuales están unidos a los otros $m$, y esas son las únicas adyacencias. El *camino simple* $P_n$ tiene $n$ vértices y todo él es un camino simple. El $n$*–ciclo* $C_n$ tiene $n$ vértices y todo él es un ciclo. La *rueda* $W_n$ consiste en un $C_n$ más un vértice adicional unido a los $n$ vértices del ciclo. El grafo de *Petersen* es el de la Figura 1 (i).

Un grafo es un *árbol* si es conexo y no tiene ciclos. El árbol trivial tiene un solo vértice y ninguna arista. La *distancia* entre dos vértices $a$ y $b$ de un grafo conexo es la menor de las longitudes de los caminos que los unen. El *diámetro* de un grafo conexo es la mayor de las distancias entre dos vértices cualesquiera. Por ejemplo, el diámetro de $P_4$ es 3 y el de $C_5$ es 2. Un vértices se dice *aislado* si no es adyacente a ningún otro. Denotaremos $\kappa(G)$ a la cantidad de componentes conexas de $G$.




(i) Grafo de Petersen | (ii) $G$ | (iii) $G_1$ | (iv) $G_2$

Figura 1

**Ejercicio 1** Para el grafo de la Figura 1 (ii), determine: 1) Un camino que no sea un recorrido; 2) Un recorrido que no sea camino simple; 3) Un camino simple de $b$ a $d$; 4) Un camino cerrado que no sea un circuito; 5) Todos los ciclos que pasan por $b$; 6) Todos los caminos simples de $b$ a $f$.

**Ejercicio 2** ¿Cuántos ciclos tienen $K_n$? ¿Cuántos caminos simples tiene $K_n$? ¿y $K_{1,n}$?

**Ejercicio 3** Sea $G$ el grafo con conjunto de vértices $\{1, 2, \ldots, 15\}$ donde el vértice $i$ es adyacente al $j$ si y solo si su máximo común divisor es mayor que 1. ¿Cuántas componentes conexas tiene $G$?

**Ejercicio 4** Encuentre un grafo $G$ que tenga tres vértices $u$, $v$ y $w$ tales que

$$\kappa(G-u)=\kappa(G), \qquad \kappa(G-v)>\kappa(G), \qquad \kappa(G-w)<\kappa(G).$$

**Ejercicio 5** Hallar la mínima cantidad de aristas que se debe eliminar a $K_n$ para que quede desconectado en 2 componentes conexas, ninguna de las cuales sea un vértice aislado.

**Ejercicio 6** ¿Cuántos caminos de largo $n$ hay entre dos vértices opuestos de $C_4$?

**Ejercicio 7** Contar la cantidad de aristas y de ciclos de longitud $k$ que hay en la rueda $W_n$ (que consiste en un $C_n$ más un vértices central unido a los $n$ vértices del ciclo).

**Ejercicio 8** Probar que en un grafo conexo, todo par de caminos simples *con longitudes la mayor posible* tienen algún vértice en común. Demostrar que la proposición es falsa si se cambia la frase en itálica por *con longitud igual al diámetro* y también es falsa si se cambia por *maximales*.

**Ejercicio 9** Hallar el diámetro de $K_n$, $K_{n,m}$, $P_n$, $C_n$ y el grafo de Petersen.

**Ejercicio 10** Sea $G$ el grafo de la Figura 1 (ii).

(a) ¿Cuántos subgrafos conexos de $G$ tienen 4 vértices e incluyen algún ciclo?

(b) ¿Cuántos subgrafos recubridores tiene $G$?

(c) ¿Cuántos de los subgrafos anteriores son conexos?

(d) ¿cuántos subgrafos de la parte (b) tienen el vértice $a$ como vértice aislado?

(e) Trace el subgrafo de $G$ inducido por el conjunto de vértices $U = \{b, c, d, f, i, j\}$.

(f) Describa el subgrafo $G_1$ y $G_2$ de $G$ (Figura 1 (iii) y (iv) respectivamente) como un subgrafo inducido y en términos de la eliminación de vértices de $G$.

(g) Encontrar un subgrafo de $G$ que no sea inducido.

**Ejercicio 11** Considere un grafo $G = (V, E)$. Demuestre que:

(a) si $G$ es conexo entonces $|E| \geq |V| - 1$.

(b) si $G$ es acíclico entonces $|E| \leq |V| - 1$.

(c) en general $\kappa(G) \geq |V| - |E|$.

**Ejercicio 12** Encontrar un grafo $G = (V, E)$ que no sea un árbol, pero que $|V| = |E| + 1$.

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 13**
Un hombre debe cruzar un perro, una oveja y una bolsa de repollos, que están en la otra margen del río, por medio de una canoa. El tamaño de la canoa no permite llevar más de un objeto a la vez y se entiende que luego de cruzar uno de estos no vuelve hacia atrás inmediatamente después con el mismo objeto. Además, no se puede dejar al perro sólo con la oveja ni a la oveja sola con la bolsa de repollos.

(a) ¿Cómo se podrá hacer?

(b) ¿Puede el hombre realizar el proceso si ha de hacer exactamente 20 viajes? (Un viaje es ir de una margen del río a la otra).

*Sugerencia: asociar a cada disposición factible un vértice y unir dos vértices si se puede pasar de dicha disposición a la otra en un solo viaje.*

**Ejercicio 14** Contar la cantidad de árboles recubridores de $K_4$ y $K_5$.

**Ejercicio 15** Determinar si se cumple o no que:

(a) $K_4$ contiene un camino que no es un recorrido.

(b) $K_4$ contiene un recorrido que no es ni un circuito ni es un camino simple.

(c) $K_4$ contiene un circuito que no es un camino simple.

**Ejercicio 16 (Examen Marzo 2001)**
El hipercubo $H_n$ de dimensión $n$, es el grafo cuyos vértices son las $n$-uplas de ceros y unos, tales que dos $n$-uplas son adyacentes si coinciden en todas sus coordenadas salvo exactamente en una de ellas.

(a) Hallar los conjuntos de vértices de $H_1$, $H_2$, $H_3$ y dibuje dichos grafos.

(b) ¿Cuántos vértices y aristas tiene $H_n$?

(c) Hallar 2 caminos simples en $H_5$ de $(0,0,1,1,0)$ a $(0,0,0,1,0)$.

(d) Demostrar que $H_n$ no tiene 3–ciclos.

(e) ¿Cuántos 4–ciclos tiene $H_n$?

*Sugerencia: considere un vértice fijo y cuente cuántos 4–ciclos pasan por él.*

**Ejercicio 17**
Sea $G_n$ el grafo con vértices las $n$-uplas de 0s y 1s: $V(G_n) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \{0,1\}\}$.
Dos $n$-uplas serán adyacentes si difieren en los valores de exactamente dos de sus posiciones, coincidiendo en el resto. Por ejemplo, en $G_3$, $(0,0,1)$ es adyacente a $(1,1,1)$ y a $(1,0,0)$, pero no a $(1,1,0)$.

(a) Dibuje $G_1$, $G_2$ y $G_3$.

(b) ¿Para qué valores de $n$ es $G_n$ conexo?

(c) ¿Cuántas componentes conexas tiene $G_n$?

*Sugerencia: sume los 1s de cada vértice.*

# 9. Isomorfismos, Grafos Eulerianos y Hamiltonianos (Secciones 11.2, 11.3 y 11.5)

**Definiciones:**

- Todos los grafos de este práctico se suponen simples, es decir, sin aristas múltiples.
- El *grafo complemento* $\bar{G}$ de un grafo $G = (V, E)$ se define como $\bar{G} = (V, V^{(2)} \setminus E)$ donde $V^{(2)} = \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$. Un grafo $G$ se dice *autocomplementario* si es isomorfo a $\bar{G}$.
- Si $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son dos grafos vértices disjuntos ($V_1 \cap V_2 = \varnothing$), entonces su *grafo unión* $G_1 \cup G_2$ se define como $G_1 \cup G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$.
- Un grafo se dice *$k$–regular* si todos sus vértices tiene grado $k$. Un *vértice colgante* es un vértice de grado 1.

**Ejercicio 1** Demostrar que en una reunión de 6 personas, existen 3 personas que se conocen entre sí o 3 personas que no se conocen ninguna de ellas (pueden ocurrir ambas).

**Ejercicio 2** Encontrar todos los árboles con 6 vértices, a menos de isomorfismos.

**Ejercicio 3** En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda una foto por Whatsapp a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba fotos de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

**Ejercicio 4** Sea $G$ un grafo con $n$ vértices. ¿Cuántos vértices de $\bar{G}$ tienen grado par si $G$ tiene un sólo vértice de grado par?

**Ejercicio 5** Probar que $K_n$ posee tres subgrafos dos a dos isomorfos y arista disjuntos si y sólo si $n$ es de la forma $3k$ o $3k + 1$.

**Ejercicio 6** ¿Cuál es el máximo orden posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3? ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? Construir en caso afirmativo.

**Ejercicio 7** Para todo natural par $n \geq 4$ construir un grafo conexo 3–regular con $n$ vértices.

**Ejercicio 8** (Examen diciembre 2016 Ej6) Demostrar que todo grafo conexo con 2 o más vértices tiene dos vértices con el mismo grado.

**Ejercicio 9** ¿Cuántas hojas (vértices colgantes) tiene un árbol con cuatro vértices de grado 2, uno de grado 3, dos de grado 4 y uno de grado 5?

**Ejercicio 10** Para cada par de grafos de la Figura 2 determinar si los grafos son o no isomorfos.

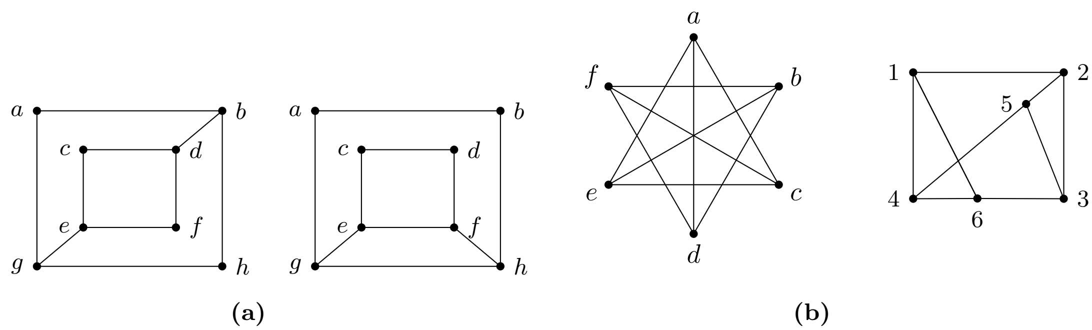



Figura 2

**Ejercicio 11**

- Demostrar que dos grafos son isomorfos si y solo si sus grafos complemento lo son.
- ¿Cuáles de los grafos de la Figura 3 son isomorfos?

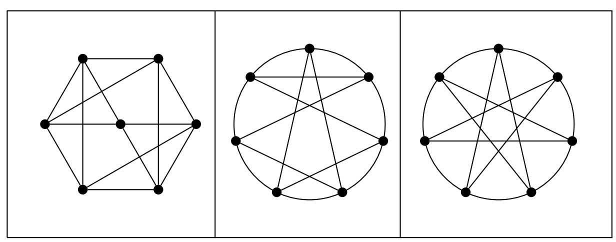


Figura 3

(a) Determinar el número de aristas de $\bar{G}$ en función del número de aristas de $G$.

(b) Determinar el número de aristas de un grafo autocomplementario de orden $n$.

(c) Construir un grafo autocomplementario de orden 4 y otro de orden 5.

(d) Determinar para qué valores de $n$ existe un grafo autocomplementario de orden $n$. *Sugerencia:* Demostrar que $n$ debe ser de la forma $4k$ o $4k+1$. Para $n = 4k$, generalizar la estructura del grafo autocomplementario de orden 4 agrupando los vértices en cuatro grupos. Para $n = 4k+1$ agregar un vértice al grafo anterior y unir en forma adecuada.

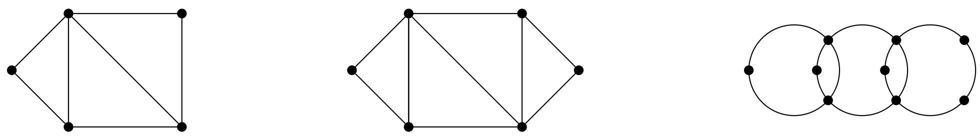
**Ejercicio 12**

(a) Determinar el orden de un grafo 3–regular con 9 aristas.

(b) Ídem con 10 aristas, dos vértices de grado 4 y los demás de grado 3.

(c) ¿Existen tales grafos? En caso afirmativo construirlos.

**Ejercicio 13** Hallar un recorrido o un circuito euleriano para cada grafo de la figura o demostrar que no existe.



**Ejercicio 14**
Encontrar un recorrido euleriano para $G = (V, E)$ con $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ y $E = \{ab, ac, ai, aj, bc, cd, ci, de, df, dg, dh, ef, fg, fh, gh, hi, ij\}$.

**Ejercicio 15**

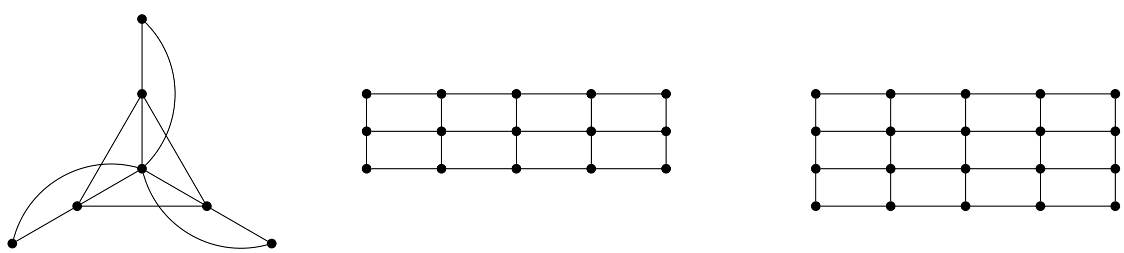
(b) Determinar los valores de $n$ para los cuales el grafo completo $K_n$ tendrá un circuito euleriano.

(b) ¿Para cuáles $n$ tiene $K_n$ un recorrido euleriano?

**Ejercicio 16**
Encontrar la longitud máxima de un recorrido en a) $K_6$; b) $K_8$; c) $K_{10}$; d) $K_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 17**
Sea $\mathcal{E}$ y $\mathcal{H}$ los conjuntos de grafos Eulerianos y Hamiltonianos respectivamente. Dar un ejemplo de un grafo en $\mathcal{E} \setminus \mathcal{H}$, otro en $\mathcal{H} \setminus \mathcal{E}$ y otro en $\mathcal{E} \cap \mathcal{H}$.

**Ejercicio 18**
Encontrar un ciclo Hamiltoniano, si existe, para cada grafo de la figura.

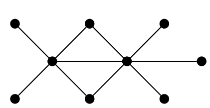


**Ejercicio 19**
(Examen Febrero 2009) ¿Cuántos vértices tiene un árbol con 16 vértices de grado 1, 20 vértices de grado 2 y el resto de grado 4?

## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 20 (Examen 2003)**
Hallar el máximo número de aristas que se le puede quitar a $K_6$ sin que el grafo deje de ser conexo.

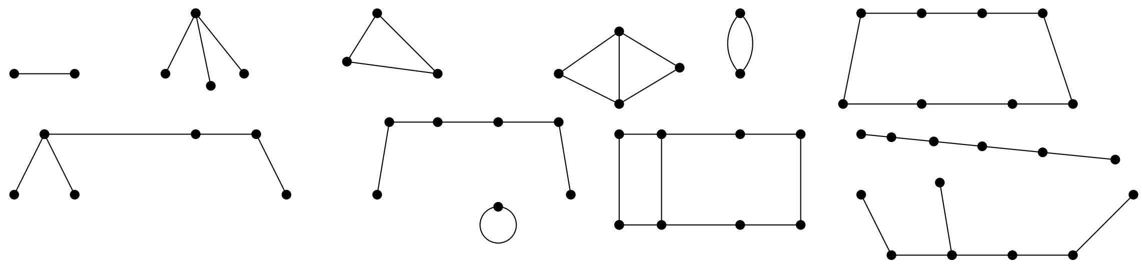
**Ejercicio 21 (Segundo Parcial 2001)**
Hallar el número de subgrafos conexos recubridores del grafo de la figura, a menos de isomorfismos.



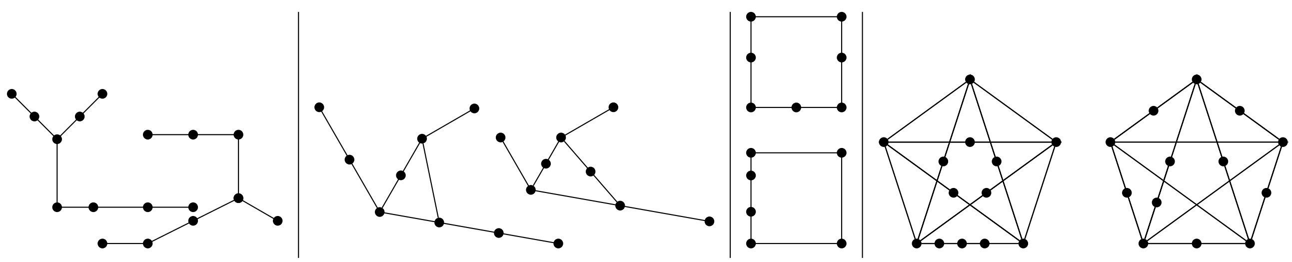
# 10. Planaridad (Sección 11.4)

**Ejercicio 1** Dibujar una inmersión en el plano de $K_4$, otra del cubo y otra de $K_{2,8}$.

**Ejercicio 2** Indicar cuáles de los multigrafos de la figura son homeomorfos:



**Ejercicio 3** Para los pares de grafos homeomorfos de la figura obtenga un tercero desde el cual los dos primeros se obtengan por subdivisiones elementales.



**Ejercicio 4**
Generalizar el Teorema de las regiones de Euler: probar que todo grafo plano $G = (V, E)$ con $\kappa$ componentes conexas verifica que $|V| - |E| + r = \kappa + 1$.

**Ejercicio 5**
Probar que si el grado máximo de los vértices de un grafo es 2, entonces el grafo es plano. ¿Es cierto el recíproco?

**Ejercicio 6**

(a) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_2$ tiene $C_4$?

(b) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_{1,3}$ tiene $W_4$?

(c) ¿Cuántos subgrafos homeomorfos a $K_2$ tiene un árbol de orden $n$?

**Ejercicio 7**
Sea $G = (V, E)$ un grafo no plano. ¿Cuál es el valor más pequeño que puede tener $|E|$?

**Ejercicio 8**

(a) Determine cuáles de los grafos de la Figura 4 son planos. Si un grafo es plano, vuelva a dibujarlo sin aristas solapadas. Si no es plano, encuentre un subgrafo homeomorfo a $K_5$, o $K_{3,3}$.

(b) Para los grafos planos de la parte anterior determinar el número de vértices, aristas y regiones del mismo. Chequear que sus respuestas satisfacen la fórmula de Euler.

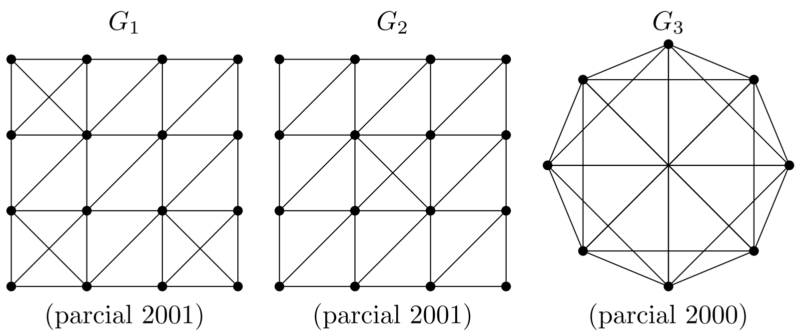



Figura 4

**Ejercicio 9**

(a) ¿Cuántas aristas tiene un grafo conexo 3-regular plano sin lazos y con ocho vértices?,

(b) Dibujar un grafo que satisfaga las condiciones de la parte anterior y otro que las satisfaga todas menos la de ser plano.

**Ejercicio 10** Sea $G = (V, E)$ un grafo plano y cuyas inmersiones planas determinan 53 regiones. Si para alguna inmersión plana de $G$ cada región tiene al menos cinco aristas en su frontera, demostrar que $|V| \geq 82$.

**Ejercicio 11**

(a) Demostrar que todo grafo plano tiene un vértice de grado 5 o menor.

(b) Demostrar que todo grafo plano con menos de 30 aristas tiene un vértice de grado 4 o menor.

(c) Demostrar que en toda inmersión de un grafo plano y conexo con 6 vértices y 12 aristas, cada una de las regiones está limitada por 3 aristas.

(d) Demostrar que para todo grafo conexo $G$ con 11 o más vértices, o bien él o su complemento $\overline{G}$ no es plano.

# 11. Coloración (Sección 11.6)

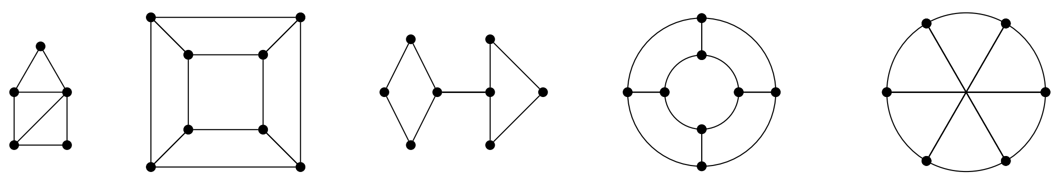
**Ejercicio 1**
En los laboratorios químicos JJ, Juanita recibe tres embarques que contienen un total de siete sustancias químicas diferentes. La naturaleza de estas sustancias es tal que para todo $1 \geq i \geq 5$, la sustancia $i$ no puede almacenarse en el mismo compartimiento que la sustancia $i+1$ o la $i+2$. Determinar el menor número de compartimientos separados que Juanita necesitará para almacenar en forma segura estas siete sustancias.

**Ejercicio 2** Encuentre el número cromático de los siguientes grafos.

(a) El grafo bipartito completo $K_{m,n}$.

(b) El ciclo $C_n$, para $n \geq 3$.

(c) Los grafos de la Figura.



**Ejercicio 3** Demostrar que $\chi(G) = 2$ si y solo si $G$ no tiene ciclos impares.

**Ejercicio 4** Sea $G = (V, E)$ un grafo y $\Delta = \text{máx}_{v \in V}\, grad(v)$.

- Demuestre que $\chi(G) \leq \Delta + 1$.
- Encuentre dos grafos de 5 vértices para los cuales valga la igualdad en la parte anterior.

**Ejercicio 5** ($2^{\text{do}}$ Parcial jun. 2018) Demostrar que todo grafo plano se puede colorear con seis colores. *Sugerencia:* usar la parte 1 del ejercicio 11 del práctico anterior.

**Ejercicio 6**
Encontrar el número cromático de los grafos $K_n$, $K_{m,n}$ y $C_n$.

**Ejercicio 7**
Probar que $\chi(G) = 2$ si y solo si $G$ no tiene ciclos impares.

**Ejercicio 8**

(a) Determinar $P(K_{1,3}, \lambda)$.

(b) ¿Cuál es el polinomio cromático de $K_{1,n}$? ¿Cuál es su número cromático?

(c) ¿Cuáles son los polinomios cromáticos de $P_n$?

(d) ¿Cuál es el polinomio cromático de un árbol con $n$ nodos?

(e) A partir de la parte anterior encontrar el número cromático de un árbol con $n$ nodos.

**Ejercicio 9**
Hallar el polinomio cromático de $K_{2,n}$.

**Ejercicio 10**
Hallar el polinomio cromático de $C_n$, $K_n$, $\overline{K_n}$, $P_n$ y $K_5$ menos una arista. En cada caso, calcular la cantidad de coloraciones usando 5 colores o menos.

**Ejercicio 11**
Hallar el polinomio cromático del grafo grilla 3x3 y la cantidad de coloraciones usando tantos colores como su número cromático.

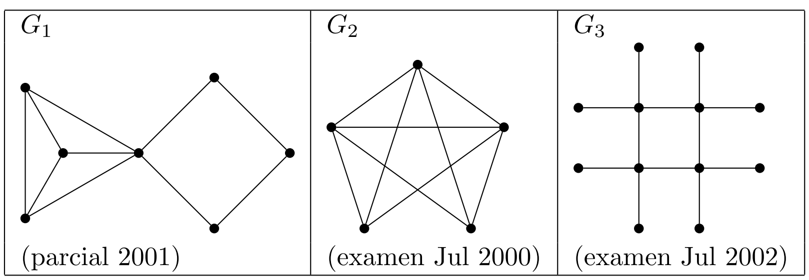
## EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

**Ejercicio 12**

(a) Determine los polinomios cromáticos para los grafos de la figura.

(b) Encuentre $\chi(G)$ para cada grafo.

(c) Si se dispone de cinco colores, ¿cuántas coloraciones propias de los vértices de cada grafo existen?




**Ejercicio 13** (Examen Febrero 2002) Sea $G$ un grafo con 5 vértices cuyo polinomio cromático evaluado en 4 vale 0, esto es

$$P(G;4) = 0.$$

entonces $G$ posee dos aristas $e$ y $f$ incidentes, tales que si $H = G - e - f$, el valor de $P(H;4)$ es:

(a) 46

(b) 47

(c) 48

**Ejercicio 14** (Examen febrero 2002) Sea $G$ un grafo con 4 vértices. Si se sabe que existe una arista $e$ de $G$ tal que $P(G - e; 2) = P(G; 2) = 2$, hallar $P(G; 3)$.

**Ejercicio 15** Dé un ejemplo de un grafo $G = (V, E)$ tal que $\chi(G) = 3$ pero que ningún subgrafo de $G$ sea isomorfo a $K_3$.