Física Experimental 1

Práctica 3 - Oscilaciones Amortiguadas

Objetivos

En esta práctica, abordaremos el estudio del movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento viscoso, con los siguientes objetivos:

- Diseñar una experiencia que permita determinar la constante elástica del resorte utilizado en el sistema.
- Evaluar el coeficiente de amortiguamiento viscoso en diferentes medios y condiciones.
- Aplicar y reforzar los conceptos y herramientas de análisis de datos adquiridos en clases anteriores.

1. Fundamento Teórico

La elasticidad es la propiedad de un material de recuperar su tamaño y forma original después de ser comprimido o estirado por una fuerza externa. En muchos materiales (metales y minerales) la deformación es directamente proporcional a la fuerza. Esto se conoce como la ley de Hooke, publicada en 1678 por Robert Hooke, uno de los científicos experimentales más importantes de la historia. Sin embargo, si la fuerza supera determinado valor, el material queda deformado permanentemente y la ley de Hooke ya no es válida. La máxima fuerza que un material puede resistir en una sección determinada sin sufrir deformaciones permanentes se denomina límite de elasticidad.

Ahora supongamos un sistema masa resorte con amortiguamiento como el que se observa en la figura 1, donde sólo trabajaremos con la proyección según el versor $\hat{\jmath}$ de la segunda ley de Newton.

En la dirección $\hat{\jmath}$, la fuerza ejercida por el resorte (F_e) debido a su estiramiento o compresión es:

$$F_e = -k\,(y - l_0) \tag{1}$$

donde k es la constante elástica del resorte y l_0 su longitud natural, de modo que $(y - l_0)$ representa la elongación respecto a la longitud natural.

Por otro lado, la fuerza viscosa F_v ejercida por el medio (aire, agua, etc.) es mas compleja de modelar y depende de varios factores como la viscosidad del fluido, el tamano del objeto sumergido y la velocidad relativa entre ellos. Para velocidades bajas y alta viscosidad, la fuerza se puede modelar como:

$$F_v = -b\dot{y} \tag{2}$$

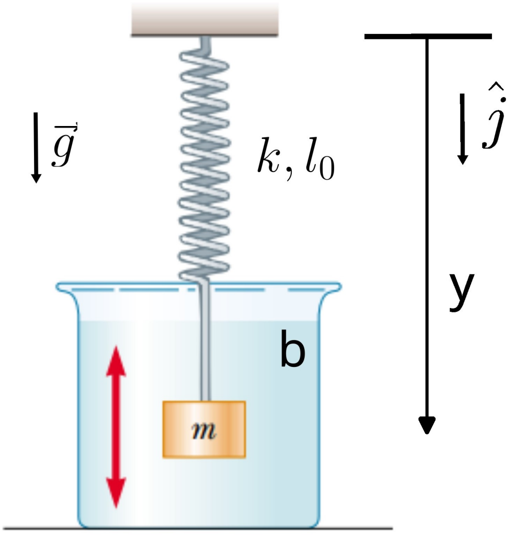

Figura 1: Sistema masa resorte con amortiguamiento

donde b es el coeficiente de amortiguamiento viscoso. A mayores velocidades el modelo se vuelve más complejo, existiendo una zona en donde se puede aproximar como dependiente de una constante por la velocidad al cuadrado. Para el problema acá planteado, esto último efecto puede ser una mejor aproximación, pero al ser no lineal, ya no se puede resolver las ecuaciones analiticamente. Por tal motivo, se trabajará con el modelo planteado en la ecuación 2.

Teniendo en cuenta las fuerzas que actúan sobre la masa descritas por las ecuaciones 1 y 2 además del peso, se llega a la siguiente ecuación de movimiento,

$$-k\left(y-l_0\right)-b\dot{y}+mg=m\ddot{y} \tag{3}$$

donde g es la aceleración gravitatoria terrestre y m la masa que oscila unida al resorte.

Si hallamos la posición de equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{y}=0 \\ \ddot{y}=0 \end{cases} \rightarrow y_0=l_0+mg/k \tag{4}$$

Realizando el cambio de variable: $x=y-y_0$, se resuelve la ecuación 3 para obtener la ley $x\left(t\right)$ (ver ejercicio 1), que representa la posición de la masa respecto de la posición de equilibrio (elongación) en función del tiempo, involucrando los parámetros propios del sistema (masa, constante del resorte, constante de amortiguamiento).

Ejercicio 1:

Realizar el cambio de variable planteado en la parte anterior y obtener la ley horaria del movimiento.

Según la relación que vincule los parámetros del sistema existen tres tipos de soluciones para la ec.3:

a) Si $b^2>4mk$ el movimiento de la masa es **sobreamortiguado** y el gráfico de la elongación en función del tiempo será como se muestra en la Figura 2.

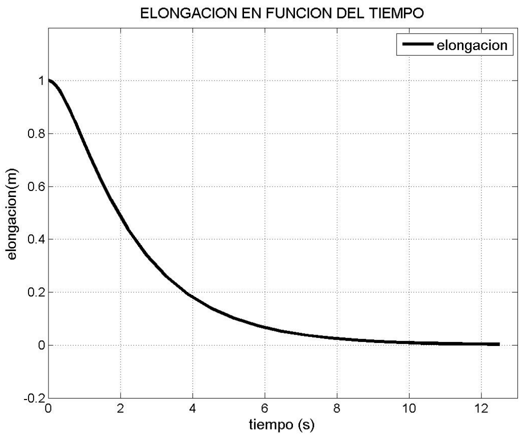

Figura 2: Gráfica de la elongación en función del tiempo para el caso sobreamortiguado.

b) Si $b^2 < 4mk$, se dice que el movimiento es **subamortiguado** y el gráfico de la elongación en función del tiempo será como se muestra en la Figura 3. Este caso se va a trabajar en más detalle y la ley horaria $x(t)$ se analiza más adelante.

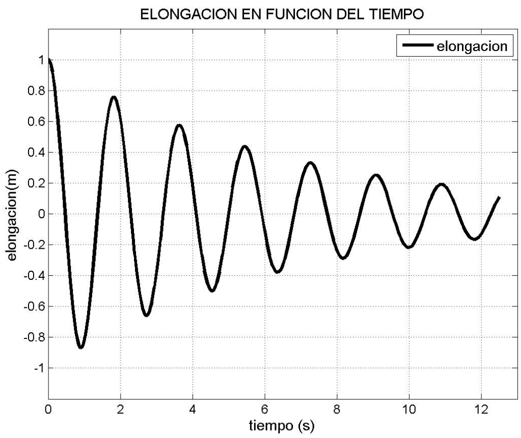

Figura 3: Gráfica de la elongación en función del tiempo para el caso subamortiguado.

c) Si $b^2 = 4mk$ se dice que existe **amortiguamiento crítico** y el gráfico de la elongación en función del tiempo será como se muestra en la Figura 4.

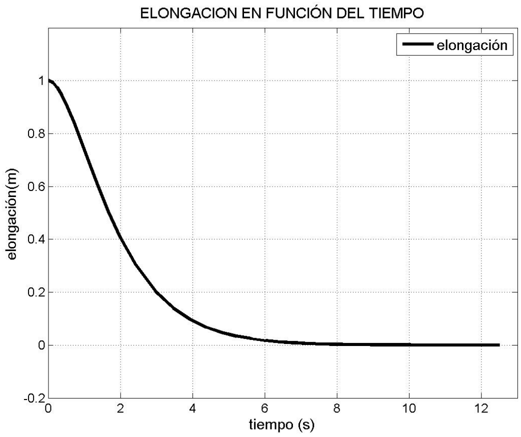

Figura 4: Gráfica de la elongación en función del tiempo para el caso de amortiguamiento crítico.

Ejercicio 2:

Para el caso subamortiguado:

a) Verificar que la expresión $x(t)$ que se presenta a continuación es solución de la ecuación de movimiento obtenida en el Ejercicio 1, para el caso subamortiguado:

$$\begin{aligned} &x\left(t\right) = A\left(t\right) sen\left(wt - \phi\right) \quad A\left(t\right) = A_0 e^{-t/\tau} \\ &w^2 = w_0^2 - \left(\frac{1}{\tau}\right)^2 \\ &\tau = \frac{2m}{b} \qquad\qquad w_0^2 = \frac{k}{m} \end{aligned} \tag{5}$$

Donde A_0 es una amplitud para la oscilación y la curva $A(t)$ es la envolvente de $x(t)$.

b) Pensar como aplicaría el método de Mínimos Cuadrados para obtener el valor de b y de A_0 y sus respectivas incertidumbres. ¿Qué significado físico tiene el valor obtenido de A_0?

c) Demostrar que si despreciamos el coeficiente de amortiguamiento viscoso (b) la constante del resorte esta dada por la expresión:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \tag{6}$$

2. Dispositivo experimental

Para realizar esta experiencia se cuenta con un sistema masa - resorte, que puede oscilar tanto en aire como en agua. La posición de la masa será determinada utilizando un sensor de movimiento que emite ondas de ultrasonido. También contarán con un dinamómetro, un instrumento capaz de medir fuerzas de empuje y tracción. El funcionamiento de ambos sensores se describe en el apéndice.

1. Recordando que la fuerza elástica se determina según la ecuación 1, discutan en grupos que metodología pueden utilizar para determinar el valor de la constante elástica k del resorte. Teniendo en cuenta que disponen del sensor de movimiento, un sensor de fuerzas y de varias masas diferentes. Consideren particularmente los siguientes casos:

    1.1. Medida dinámica: Si se mide al mismo tiempo con el sensor de movimiento y el sensor de fuerzas para determinar simultáneamente $y - l_o$ y $|\vec{F}_e|$ respectivamente.

    1.2. Medida estática: Determinar k usando diferentes masas y midiendo el estiramiento y la fuerza cuando las masas están en equilibrio. Comparar los dos valores de k obtenidos con los dos diferentes métodos.

    En ambos casos piensen como se puede usar el método de mínimos cuadrados para determinar k con su incertidumbre.

2. Armar un sistema experimental que permita detectar las oscilaciones del sistema masa-resorte.

3. Antes de comenzar a medir se debe analizar qué cuidados experimentales deben tomarse para cumplir las hipótesis del modelo teórico que se quiere aplicar para el análisis.

4. Los datos obtenidos deberán ser exportados desde LoggerPro a un archivo de texto para poder analizarlos utilizando el programa SciDavis o similar. Visualizando la curva obtenida de las oscilaciones del sistema, infiera a cuál de los movimientos oscilatorios que estudiamos corresponde.

5. Encontrar b y su incertidumbre. Para obtener el valor de b, se deberá ajustar los valores de amplitudes máximas por una función adecuada, utilizando el método de mínimos cuadrados. Las medidas y el análisis de b debe ser realizado para un medio de amortiguamiento a elección: Aire o Agua.

6. Con los valores de b y de k obtenidos graficar la función elongación en función del tiempo que se desprende del modelo teórico (Ec. 5) y compararla con la gráfica obtenida experimentalmente.

A. APÉNDICE: Características de los sensores.

A.1. Detector de Movimiento por ultrasonido

El detector de movimiento emite pequeños paquetes de ondas de ultrasonido desde un transductor ubicado en su interior. El detector entonces escucha el eco de las ondas que fueron reflejadas por cierto objeto que se interpuso en su camino. El instrumento mide el tiempo que tardan las ondas en llegar al objeto y volver al detector, usando este tiempo y la velocidad del sonido en el aire, determina la distancia al objeto. La sensibilidad del circuito detector del eco se incrementa de a pasos por cada milisegundo que transcurre, con el fin de tener en cuenta la atenuación de las ondas si el objeto se encuentra lejos del detector.

Las ondas son emitidas en un cono con un ángulo de entre 15 y 20 grados, medidos desde el centro del eje de la fuente, como se muestra en la figura 5. De esta forma, el sensor sólo detecta objetos que se encuentran dentro del cono de emisión. Por otro lado, el sensor no es capaz de identificar la fuente del eco (sólo su distancia), por lo tanto, en caso de tener más de un objeto dentro del cono de emisión el sensor va a dar resultados erróneos. Las especificaciones del detector de movimiento proporcionadas por el fabricante se encuentran en la tabla 1.

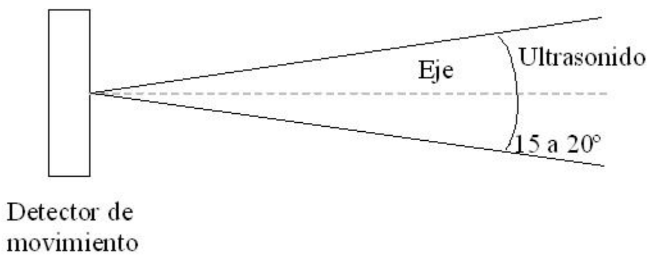

Figura 5: Esquema del detector de movimiento con el cono de ondas de ultrasonido

Tabla 1: Especificaciones del detector de movimiento

Frecuencia del ultrasonido	$40KHz$
Resolución	$2mm$
Exactitud típica	$2mm$
Rango mínimo	$0,4m$
Rango máximo	$6m$
Velocidad del ultrasonido	$343m/s$
Alimentación	$51mA@5VDC$

A.2. Sensor de Fuerzas (dinamómetro)

El sensor de fuerza de doble rango que se muestra en la figura 6 es un dispositivo que permite medir fuerzas de empuje y tracción. En este caso, el sensor mide la fuerza que se ejerce sobre su asa (ya sea de empuje o tracción). Se puede usar como reemplazo de una balanza de resorte manual, montarse en un soporte para medir fuerzas verticales o en un carro dinámico para estudiar colisiones. Puede entonces ser utilizado en una amplia variedad de experimentos, que incluyen, por ejemplo: colisiones, movimientos armónicos, ley de Hooke, etc.

En el caso del experimento de ley de Hooke con el sensor vertical, basta con colocar un extremo del resorte en el asa del sensor y el otro extremo en la masa. Se deja que la masa estire al resorte hasta que este alcance la longitud de equilibrio, de esta forma el sensor mide la fuerza ejercida por el resorte que es necesaria para que la masa esté en equilibrio.

Entre otras características el sensor permite medir fuerzas desde 0.01 Newton hasta 50 N. Tiene dos escalas diferentes (rangos): una de 10 N (con resolución de 0.01 N) y otra de 50 N (con resolución de 0.05 N).

Figura 6: Esquema del sensor de fuerza