Física Experimental 1

Medidas y cifras significativas

1. Mediciones

En lo que sigue se definirán conceptos referentes a la realización y presentación de medidas conforme a los estándares internacionales aceptados actualmente[1].

El objetivo de una medición es determinar el valor de una determinada magnitud, que llamaremos mensurando. Para ello debemos comparar el valor de cierta magnitud con un patrón primario, asignándole un número a través de algún procedimiento, utilizando instrumentos de medida. Un patrón o estándar de medida es un objeto calibrado, cuya trazabilidad permite vincular lo que se mide con dicho patrón, a otros patrones (que pueden ser nacionales o internacionales), permitiendo de esta manera que lo que es definido como "un kilogramo" (o cualquier magnitud de interés) tenga el mismo significado a nivel global. En Uruguay, el instituto técnico que se encarga de llevar dicha trazabilidad y realizar los procesos de calibración de diversos instrumentos contra patrones nacionales es el Laboratorio Tecnológico del Uruguay (LATU). En general, cada país tiene un laboratorio similar al LATU cuyo objetivo es asegurar que se mantengan las definiciones correspondientes y puedan ser vinculados a los patrones básicos que son definidos a nivel internacional por el Bureau International des Poids et Mesures (BIPM).

¿Qué forma tienen estos patrones que permiten realizar diversas definiciones? A lo largo del tiempo han ido variando. Hasta hace relativamente poco tiempo algunos patrones internacionales eran objetos físicos, como el kilogramo patrón que se muestra en la Figura 1.

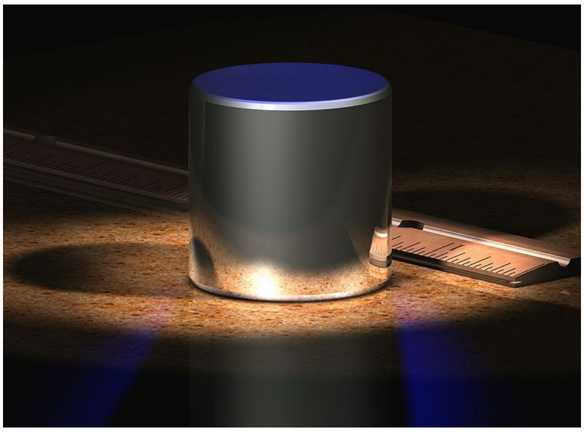

Figura 1: Kilogramo patrón utilizado hasta el año 2019. Fuente: Wikipedia

El principal inconveniente de tener objetos físicos como patrones es que pueden variar su tamaño o masa a lo largo del tiempo, por lo que se tendría un patrón variable. Esto no tiene porque afectar el desarrollo de tareas cotidianas o a escalas grandes, sin embargo, puede ser un problema considerable en aplicaciones de mucha precisión o microscópicas. Por esta razón, BIPM ha ido migrando las definiciones de las magnitudes básicas en función de constantes físicas universales, como por ejemplo la constante de Planck, la carga del electrón, entre otras. Esto hace que se genere un sistema de unidades bastante conocido denominado Sistema Internacional de Unidades (SI), que fue creado por el BIPM en el año

[1]basados en la "Guía para la expresión de incertidumbre en mediciones", ("Guide to the expression of uncertainly in measurements") BIPM, ISO, IEC, IFCC, IUPAC, IUPAP, GILM. 1995

1960 y actualizado fuertemente en el año 2019. Actualmente, es posible derivar las unidades básicas de este sistema a través de las siguientes definiciones:

- la frecuencia de transición hiperfina del estado base no perturbado del átomo de Cesio-133 es $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}}$ is 9192631770 Hz
- la velocidad de la luz en el vacío c es 299792458 m s^{-1}
- la constante de Planck h es 6,62607015$\times$10^{-34} J s
- la carga elemental e es 1,602176634$\times$10^{-19} C
- la constante de Boltzmann k vale 1,380649$\times$10^{-23} J K^{-1}
- la constante de Avogadro N_A vale 6,02214076$\times$10^{23} mol^{-1}
- la eficiencia lumínica de radiación monocromática de frecuencia 540 $\times$ 10^{12} Hz, K_{cd}, es 683 lm W^{-1} ($K_{\mathrm{cd}} = 683$ lm W^{-1})

Entonces, la lista anterior da lugar a siete unidades básicas que componen el SI, mostradas en la Tabla 1.

Magnitud	Símbolo	Unidad	Expresión
tiempo	t	segundo	s
longitud	l, x, r, etc	metro	m
masa	m	kilogramo	kg
corriente eléctrica	I, i	ampere	A
temperatura	T	kelvin	K
cantidad de sustancia	n	mol	mol
intensidad luminosa	I$_v$	candela	cd

Tabla 1: Unidades básicas del Sistema Internacional.

Es posible combinar las unidades presentadas en la Tabla 1 mediante el producto y divisiones, generando nuevas magnitudes. Algunos ejemplos de este proceso se muestra en la Figura 2.

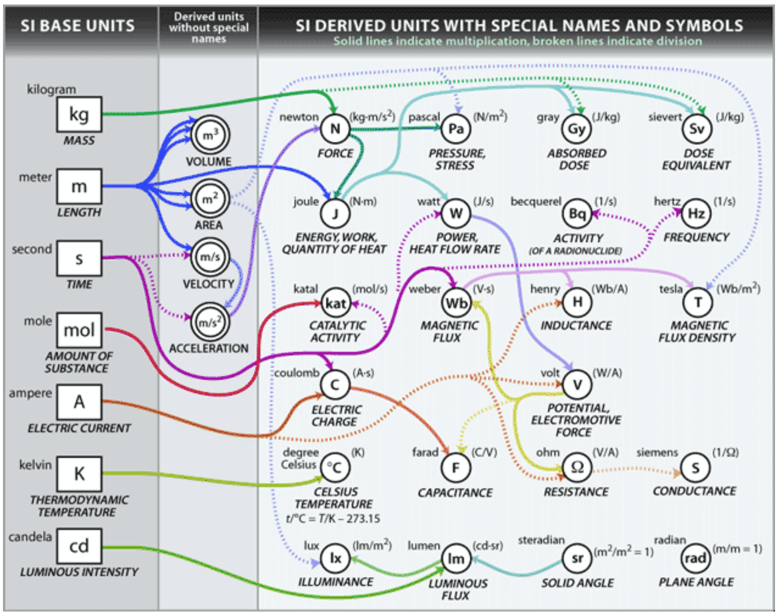

Figura 2: Unidades básicas del Sistema Internacional, junto a algunas unidades que se derivan de las mismas. Fuente: NIST.

Así como el SI define unidades básicas, también define prefijos que son útiles para trabajar en el día a día. La Tabla 2 muestra los prefijos básicos de uso cotidiano en el área de la Ingeniería.

Factor	Prefijo	Símbolo
10^{12}	tera	T
10^{9}	giga	G
10^{6}	mega	M
10^{3}	kilo	k
10^{2}	hecto	h
10^{1}	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Tabla 2: Prefijos básicos del Sistema Internacional.

Una vez establecidos y determinados los patrones de medida, podemos retomar el análisis del proceso de medida. Debido a imperfecciones naturales en la realización de las mediciones, es imposible conocer con certeza absoluta el valor de una magnitud.

Por ejemplo, medimos la longitud de un lápiz con una regla y el resultado obtenido para el mensurando es $12,3$ cm. Sin embargo, utilizando algún instrumento amplificador (lupa, microscopio) podríamos notar que las marcas de la regla que utilizamos no coinciden exactamente con los extremos del lápiz. Las propias marcas de la regla podrían revelarse con cierto ancho propio. Incluso resultará que en cierto punto nos encontramos en el lápiz, la misma situación que en la regla; a este nivel de amplificación las irregularidades en la forma del lápiz provocan que incluso el concepto de "longitud del lápiz"pueda no resultar nada obvio, si es que el mismo no perdió ya su validez y se debe redefinir.

Otro caso sería si consideráramos los efectos de la temperatura, la cual afecta directamente al mensurando por expansión o contracción térmica tanto del lápiz como de la regla. Este ejemplo nos muestra parte de las dificultades existentes en la determinación del "valor real"de una magnitud.

Por lo tanto lo que es posible obtener tras una medida no es el "valor real"de la misma, sino un intervalo de valores dentro del cual se encuentra la magnitud que nos interesa. Esto quiere decir que toda medición lleva implícita una **incertidumbre** y su resultado debe incluir la estimación del valor del mensurando y del rango donde es más probable que este valor se encuentre (su incertidumbre).

O sea que podemos representar el resultado de una medida como:

$$x = (\bar{x} \pm u(\bar{x}))[\text{unidades}] \tag{1}$$

Donde $\bar{x}$ es la estimación del valor del mensurando (el mejor resultado que podemos obtener del proceso de medida) y $u(\bar{x})$ su incertidumbre asociada[2]. Lo anterior permite afirmar que existe cierta probabilidad de que el "*valor real*"se encuentre en el intervalo $[\bar{x} - u(\bar{x}), \bar{x} + u(\bar{x})]$.

Se define el **error** en una medida como la diferencia entre el resultado de la medida y un valor acordado de referencia.

Siempre se debe tener presente la diferencia entre *error* e *incertidumbre*; el resultado de una medida puede estar extremadamente cerca del valor de referencia de la magnitud y por lo tanto tener un *error* despreciable, aún cuando dicha medida pueda tener una gran *incertidumbre* asociada.

Cuanto mas pequeño es el error, decimos que la medida es más **exacta**, ya que la misma se aproxima al valor de referencia (llamémosle x_{ref}). Para evaluar este error conviene estudiar el error porcentual: $|\frac{\bar{x} - x_{ref}}{x_{ref}}| \times 100\,\%$

2. Clasificación de incertidumbres.

Las fuentes de incertidumbre pueden categorizarse en sistemáticas y aleatorias. Las sistemáticas afectan a todas las medidas por igual, y si son conocidas y evaluadas es posible aplicar un factor de corrección a la medida con el fin de disminuirlas lo más posible. El resultado de la medida luego de aplicar las correcciones, seguirá siendo una estimación del verdadero valor, debido a incertidumbres provenientes de efectos aleatorios, imperfecciones en el método o instrumentos de medición, entre otros. Por ejemplo, si conocemos que la regla utilizada anteriormente para medir el lápiz tiene un error de $+0,1$ cm respecto al metro patrón, tomamos las medidas y luego sumamos $-0,1$ cm para descontarlo. Es importante tener en cuenta que no siempre se cuenta con un valor de referencia, o que identificar errores de calibración en los instrumentos no es sencillo. Al usar una regla no solemos revisar que cada centímetro tenga la cantidad de milímetros que debería, más aún, ¿Cómo podríamos verificar si una balanza está mal calibrada? ¿O un sensor de presión?.

Dos conceptos importantes de distinguir al momento de hablar de medidas experimentales son los de precisión y exactitud (suelen estar asociados a los conceptos de incertidumbre sistemáticas y aleatorias). Para definirlos, nos ayudaremos de la diana en la Figura 3.

Imaginemos que existe un valor real de la magnitud que estamos midiendo. A este valor real se lo representa en el centro de la diana, y se lo indica por la intersección de las líneas horizontal y vertical. En nuestro esquema, las medidas que tomamos son representadas por los puntos rojos. Como podemos observar, estas medidas pueden comportarse de modo muy diferente entre sí y con respecto al valor real.

Si nuestro conjunto de medidas está muy disperso entre sí, como es el caso de las figuras A y C de nuestro esquema, se dice que la medida no es precisa. Por el contrario, cuando la dispersión entre nuestro conjunto de medidas es baja (casos B y D) el método de medida es preciso. Para aumentar la precisión de un conjunto de medidas lo ideal es establecer un procedimiento estandarizado para realizar las mediciones. ¿Podrías pensar algún ejemplo en donde el conjunto de medidas tenga una baja precisión?

Por otra parte, el conjunto medido puede tener una gran precisión, pero aún así encontrarse alejado del valor real. Este caso se ejemplifica en la figura B, y podemos pensar, por ejemplo, en una balanza mal calibrada que nos dará siempre un valor de masa superior al real. Cuando hablamos de cercanía o lejanía de un conjunto de medidas al valor real, hablamos de exactitud. Una medida es exacta cuanto más se acerca al valor real, como muestra la figura 3. Ahora, si borramos la diana de

[2]Muchas veces también se denota como $\Delta\bar{x}$

fondo, no podemos distinguir entre las opciones B y D, y por lo tanto no podemos evaluar la exactitud de la medida. Esto corresponde a no tener un valor de referencia.

Es importante resaltar que el ejemplo anterior involucra un conjunto de medidas, si no tenemos varias medidas no podemos evaluar cuan dispersas están entre sí, y por ende no sabemos el grado de precisión. Sin embargo, el grado de exactitud puede ser evaluado siempre que se conozca el valor de referencia. Cuando tomamos una sola medida, podemos determinar la confiabilidad de esa medida, evaluando la incertidumbre porcentual (la definición se verá más adelante).

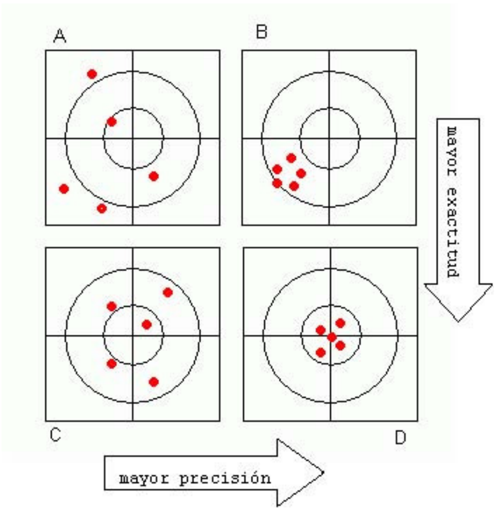

Figura 3: Representación de exactitud y precisión de un conjunto de medidas.

Algunos de los factores que pueden influir en la incertidumbre son:

- Definición incompleta del mensurando.
- Conocimiento parcial de la influencia de las condiciones ambientales.
- Incertidumbres agregadas por el operador.
- Resolución limitada de los instrumentos
- Valores de constantes o parámetros usados en los cálculos.
- Aproximaciones realizadas en el procedimiento de medida
- Variación en observaciones repetidas en condiciones aparentemente idénticas.

Una clasificación de incertidumbres consiste en agrupar las mismas en dos categorías según el método utilizado para estimar sus valores numéricos:

- Incertidumbres tipo A: aquellas que son evaluadas mediante análisis estadístico sobre una serie de observaciones.
- Incertidumbres tipo B: aquellas que son evaluadas por otros métodos, que requieren de información previa y que no necesariamente son métodos estadísticos sobre una serie de mediciones realizadas por el operador.

En la lista de factores que afectan a la incertidumbre, exceptuando el último factor, el resto son fuentes de incertidumbres tipo B. Por ejemplo, en caso de tener medidas realizadas con un instrumento de resolución R la incertidumbre tipo B asociada a la medida será:

$$\mu_B = \frac{R}{2\sqrt{3}} \tag{2}$$

Este resultado se basa en suponer que las medidas realizadas con dicho instrumento tendrán una distribución uniforme de ancho R.[3]

[3]Este resultado se estudiará en cursos más avanzados

Combinación de incertidumbres

Una vez que se tiene caracterizada la incertidumbre Tipo A (μ_A) y la incertidumbre Tipo B (μ_B), entonces la incertidumbre final es combinada y puede expresarse como se muestra en la Ec. (3):

$$\mu = \sqrt{\mu_A^2 + \mu_B^2} \tag{3}$$

Criterio de Confiabilidad

Para cuantificar la precisión de un proceso de medida haremos una comparación entre la incertidumbre $u(\bar{x})$ y la medida $\bar{x}$. Estudiar la incertidumbre relativa $u(\bar{x})/\bar{x} \times 100\,\%$ nos da una medida porcentual de la proporción de incertidumbre en la medida. En este curso, utilizaremos el siguiente criterio:

- Una medida es confiable si la incertidumbre porcentual esta por debajo del $10\,\%$.
- Aceptables si esta entre $10\,\%$ y $40\,\%$.
- No confiable si es mayor al $40\,\%$.

3. Cifras significativas y redondeo de un número.

3.1. Cifras significativas

Supongamos que tenemos un reloj cuya resolución es de décimas de segundo. Una medida del tiempo con este reloj podrá proporcionarnos, por ejemplo, el valor $t = 2,4$ s. Si tuviéramos otro reloj de mayor precisión capaz de apreciar hasta las centésimas de segundo, podrían obtenerse valores como, por ejemplo, $t = 2,45$ s:

- En el primer caso, decimos que el número tiene dos cifras significativas (el 2 y el 4).
- En el segundo caso, el número tiene tres cifras significativas (el 2, el 4 y el 5).

Debe quedar claro que ambas medidas, aunque aparentemente iguales, son distintas: $2,4$ s $\neq 2,40$ s ya que el número de cifras significativas es distinto. La medida $2,40$ s implica una mayor precisión o confiabilidad que una medida de $2,4$ s.

Es importante observar que los ceros a la izquierda de un número no son cifras significativas, mientras que los ceros a la derecha sí son cifras significativas.

Ejemplo 1
A continuación se indica la cantidad de cifras significativas de cada número

- $0,02$ - una cifra significativas (el 2)
- $0,020$ - dos cifras significativas (el 2 y el 0 de la derecha)
- $2,01$ - tres cifras significativas (el 2, el 0 y el 1)
- $0,20100$ - cinco cifras significativas (todas excepto el cero a la izquierda)

Ejemplo 2
Debe tenerse cuidado cuando se exprese una medida en distintas unidades: cuando se proceda a un cambio de unidades la medida debe siempre expresarse con el mismo número de cifras significativas. Por ejemplo, si el resultado de una longitud es 12 mm (dos cifras significativas), podríamos expresar la medida como:

12 mm $= 1,2$ cm $= 0,012$ m $= 0,000012$ km $= 1,2 \times 10^{-5}$ km

En todos los casos, los números están expresados con el mismo número de cifras significativas (dos). Sería incorrecto expresar la medida como $1,20$ cm (tres cifras significativas), o como $0,01200$ m (cuatro cifras significativas). Es conveniente usar la notación científica cuando el número es muy grande o muy pequeño. Por ejemplo, si el tamaño de una partícula es $2,4\ \mu$ m (dos cifras significativas), expresado en m sería $2,4 \times 10^{-6}$ m. Es más conveniente usar esta notación en lugar de la notación convencional ($0,0000024$ m).

Ejemplo 3
A continuacion se expresaran los resultados en notación científica

- $12,7\ mm = 1,27 \times 10^1\ mm$
- $789,4\ kg = 7,894 \times 10^2\ kg$
- $789,400\ km = 7,89400 \times 10^2\ km$
- $0,0000270\ s = 2,70 \times 10^{-5}\ s$

3.2. Redondeo

Redondear un dato no es más que expresar dicho dato con el número de cifras significativas deseado. Para ello, habrá que eliminar tantas cifras a la derecha del dato como sea preciso según las siguientes reglas:

- Si la cifra omitida es menor que 5, la cifra anterior permanece inalterada.
- Si la cifra omitida es mayor o igual que 5, la cifra anterior se aumenta en una unidad.

Por ejemplo, el valor $t = 2,538591$ s tiene 7 cifras significativas. Si se quiere redondear a 6 cifras significativas, $t = 2,53859$ s; con 5 cifras significativas, $t = 2,5386$ s; con 4 cifras significativas, $t = 2,539$ s; con 3 cifras, $t = 2,54$ s; con 2 cifras, $t = 2,5$ s y con una cifra significativa, $t = 3$ s.

3.3. Criterios importantes

El valor de la medida y su incertidumbre deben expresarse **siempre** con el mismo número de cifras decimales. Como norma general, la incertidumbre debe expresarse siempre con una o con dos cifras significativas. Recomendamos fuertemente que la incertidumbre se exprese con una sola cifra, y que se recurra a dos cuando sea necesario, siempre teniendo en cuenta el significado de una incertidumbre con dos cifras significativas.

Por lo tanto, una vez obtenido el resultado de una magnitud y su incertidumbre se deberá:

- Escribir la incertidumbre con una o dos cifras significativas.
- Escribir el valor de la magnitud con la misma cantidad de decimales que la incertidumbre.
- Es muy importante que la medida tenga su correspondiente unidad, de lo contrario la misma pierde su significado.

4. Propagación de incertidumbres.

En muchos casos la magnitud a determinar y no se mide directamente, sino a través de la determinación de otras N magnitudes de entrada $x_1, ..x_N$, que se vinculan a través de la relación funcional:

$$y = f(x_1, ...x_N) \tag{4}$$

Por ejemplo, si se quiere medir el volumen de un recipiente prismático de agua se pueden medir los lados (variables x_i) y realizar una operación para calcular el volumen (definida por la función f). Supongamos que el resultado obtenido luego de medir **una** vez estas magnitudes es $x_1^*, .., x_N^*$, cada una de ellas medida con incertidumbres $u(x_1^*), .., u(x_N^*)$ respectivamente.

Por lo tanto el valor de y estará comprendido dentro de cierto intervalo de incertidumbre que habrá que determinar. La incertidumbre estándar combinada del resultado de la medida y, que designaremos $u(y)$ está dada por:

$$u^2(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i^*} \right)^2 u^2(x_i^*) + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i^*} \frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_{x_j^*} u^2(x_i^*, x_j^*) \tag{5}$$

Esta ecuación está basada en un desarrollo de Taylor de primer orden de la ecuación 4 y nos referiremos a ella como **ley de propagación de incertidumbres**. Si las variables que se están midiendo son independientes, el segundo término de la ecuación 5 se anula. Esta última hipótesis se cumplirá en la mayoría de las situaciones experimentales con las que trabajemos en este curso. Por lo tanto la ecuación 5 se reduce a:

$$u^2(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{x_i^*} \right)^2 u^2(x_i^*) \tag{6}$$

Ejemplo 4

Realicemos un ejemplo sencillo de aplicación de la expresión para propagación de incertidumbre de la ecuación 6.

Mediante la medida del volumen (V) de un líquido, y conociendo su densidad ρ, calculamos la masa (m) del líquido mediante la expresión $m = \rho V$

En este caso, la función $y = f(x_1, ...x_N)$ expresada en la ecuación 4 quedaría de la forma:

$$m = f(\rho, V) \tag{7}$$

Si consideramos que tanto ρ como V poseen incertidumbre ($u(\rho)$ y $u(V)$ respectivamente), podemos calcular el cuadrado de la incertidumbre de m, δm aplicando la ecuación 6:

$$u^2(m) = \left(\frac{\partial m}{\partial \rho} \right)^2 u^2(\rho) + \left(\frac{\partial m}{\partial V} \right)^2 u^2(V) \tag{8}$$

Por último, deben calcularse las derivadas y resolver el cuadrado en la ecuación 8:

$$u(m) = \sqrt{V^2 u^2(\rho) + \rho^2 u^2(V)} \tag{9}$$

En la ecuación 9 encontramos la expresión analítica para la incertidumbre de la masa. Pongámosle valores numéricos para terminar el ejemplo. Supongamos que el líquido medido es aceite ($\rho = (0,92 \pm 0,01)$ g/mL) y se mide un volumen de $V = (15,7 \pm 0,2)$ mL. Podemos calcular entonces la masa y la incertidumbre de la masa para para dicho volumen de aceite:

$$m = (0,92\ g/mL) \times (15,7\ mL) = 14{,}444g$$
$$u(m) = \sqrt{(15,7mL)^2 \times 0,01(g/mL)^2 + (0,92g/mL)^2 \times (0,2mL)^2}$$
$$u(m) = 0,242\ g$$

Finalmente, expresando correctamente el valor con una incertidumbre de una sola cifra significativa tenemos:

$$m = (14{,}4 \pm 0,2)g \tag{10}$$

Ejemplo 5

La potencia eléctrica que consume un resistor puede hallarse mediante a través de conocer la corriente que circula por la misma (i) y el valor de la resistencia que se utiliza (R): $P = Ri^2$.

Supongamos que luego de un proceso de medición se determinó que circuló una corriente de $i^* = (50 \pm 8)$mA por un resistor de resistencia $R^* = (3{,}3 \pm 0{,}2)$kΩ. Por lo tanto la potencia disipada es:

$$P = R^*(i^*)^2 = (3{,}3\text{k}\Omega)(50\text{mA})^2 = 8{,}25\text{W}$$

Ahora, aplicando la Ec. (6), es posible hallar la incertidumbre de la potencia calculada:

$$u^2(P) = \Bigg(\underbrace{\left.\frac{\partial P}{\partial R}\right|_{R^*,i^*}}_{(i^*)^2}\Bigg)^2 u^2(R^*) + \Bigg(\underbrace{\left.\frac{\partial P}{\partial i}\right|_{R^*,i^*}}_{2R^*i^*}\Bigg)^2 u^2(i) = (i^*)^4 u^2(R^*) + (2R^*i^*)^2 u^2(i^*)$$

Sustituyendo numéricamente:

$$u(P) = \sqrt{(50\text{mA})^4(0,2\text{k}\Omega)^2 + 4(3,3\text{k}\Omega)^2(50\text{mA})^2(8\text{mA})^2} = 2{,}687\text{W}$$

Por lo tanto, aplicando los criterios de cifras significativas llegamos a la expresión final para la potencia disipada por el resistor es $P^* = (8 \pm 3)$W.

El cálculo de propagación de incertidumbres se retomará en la próxima clase para una situación más general, al realizar un análisis estadístico de los resultados para determinar la incertidumbre tipo A de un proceso de medida.

5. Bibliografía

- Bureau International des Poids et Mesures , *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*, 2008.
- John R. Taylor, *An Introduction to Error Analysis: The Study of Uncertainties in Physical Measurements*, University Science Books, 1997.
- International Organization of Legal Metrology, *International Vocabulary of Metrology – Basic and General Concepts and Associated Terms (VIM)*, 2007.
- L. Kirkup, R. B. Frenkel, *An Introduction to Uncertainty in Measurement Using the GUM*, 2006.