1. Conjuntos

Ejercicio 1.1

Determinar todos los elementos de los siguientes conjuntos:

1. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq 5\}$
2. $B = \{n \in \mathbb{N} : n^2 \leq 12\}$
3. $C = \{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 2 = 0\}$

Ejercicio 1.2

Nota: $A \setminus B$ denota el conjunto formado por los elementos de A que no son elementos de B (diferencia de conjuntos).
Consideremos $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Hallar $A \setminus B$ $A \cap B$, $(A \cup B) \setminus \{2, 3, 4\}$.

Ejercicio 1.3

Dados $B = \{x \in \mathbb{N} \;/\; 2 \text{ divide } x \text{ y } 3 < x < 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : 3 < x < 9\}$.
Hallar todos los conjuntos D que verifican simultáneamente $D \subset C$, $\{6, 7\} \subset D$ y $B \cap D = \{6, 8\}$.

2. Lógica

Ejercicio 2.1

Completar el cuadro siguiente:

$\mathcal{P}$	no $\mathcal{P}$
Las rectas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son perpendiculares.	
Las rectas $\mathcal{D}$ y $\mathcal{D}'$ son paralelas.	
13=12	
$x \in \mathbb{N}$.	
$x \neq 1$.	
$x > 0$.	
$x \leq 1$	
$x - 2 = 0$	

Ejercicio 2.2

Las expresiones **"existe al menos un..."** y **"para todo..."** se utilizan para precisar cuántos elementos de un conjunto verifican una proposición, si todos o algunos. En matemática el "existe" se denota con el simbolo "$\exists$" y el "para todo" con el símbolo "$\forall$" y reciben el nombre de cuantificadores.

Completar utilizando un cuantificador las proposiciones siguientes para que sean verdaderas:

1. $(x+1)^2 = x^2 + 1$.
2. $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.
3. $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$.
4. $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$.

Ejercicio 2.3

Utilizando cuantificadores, escribir la **negación** de los siguientes enunciados sobre de la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

1. "La función f tiene al menos una raíz"($\exists x \in [0,1]$ tal que $f(x) = 0$).
2. "La función f tiene máximo absoluto"($\exists M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq M$).
3. "Si $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, $f(x) > -1$".
4. "Para todo $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in (0,1)$ tal que $f(x) < y$".

3. Algebra

3.1. Operatoria básica

Ejercicio 3.1

Expresar en forma reducida cada uno de los siguientes números.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
2. $4\left(\frac{1}{3}\right)$
3. $\frac{-3}{5}\left(\frac{2}{3} - 1\right) - \frac{4}{3}$
4. $\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$
5. $\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{3}{4}}$
6. $\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\right)$
7. $\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{3}\right)^3$
8. $\left(\frac{2^3}{3^3}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^2$
9. $\left(\frac{1/3}{2/5}\right)^{-2}$

Ejercicio 3.2

Calcular simplificando la respuesta lo más posible. Expresar el resultado como una sola fracción reducida.

1. $\frac{3}{5} - \frac{4}{3}$
2. $\frac{x}{yz} + \frac{y}{z}$
3. $\frac{3x}{5y} + \frac{4x}{2y^2}$
4. $\frac{3}{5} \times \frac{4}{3} \times \frac{5}{2}$
5. $\frac{3}{4(x+1)} - \frac{7}{2(x-1)}$
6. $\frac{\frac{x^2-4}{x+1}}{\frac{x+2}{3x-5}}$
7. $\frac{xy}{yz} - \frac{y}{z}$
8. $\frac{1+\frac{3}{2}}{\frac{3}{4}-1}$
9. $\frac{x+\frac{y}{z}}{\frac{y}{z}-z}$

Ejercicio 3.3

Simplificar los siguientes radicales

1. $\sqrt{32}\sqrt{2}$
2. $\frac{\sqrt[3]{-2}}{\sqrt[3]{54}}$
3. $\frac{\sqrt[4]{32x^4}}{\sqrt[4]{2}}$
4. $\sqrt{xy}\sqrt{x^3y}$
5. $\sqrt{16a^4b^3}$
6. $\frac{\sqrt[5]{96a^6}}{\sqrt[5]{3a}}$

Ejercicio 3.4

Factorizar las siguientes expresiones:

1. $2x + 12x^3$
2. $5ab - 8abc$
3. $x^2 + 7x + 6$
4. $x^2 - x - 6$
5. $2x^2 + 7x - 4$
6. $9x^2 - 36$
7. $6x^2 - 5x - 6$
8. $x^2 + 10x + 25$
9. $t^3 + 1$
10. $4t^2 - 9s^2$
11. $4t^2 - 12t + 9$
12. $x^3 - 27$
13. $x^3 + 2x^2 + x$
14. $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$
15. $x^3 + 3x^2 - x - 3$

Ejercicio 3.5

Calcular las raíces de los siguientes polinomios y factorizarlos.

1. $P(x) = x^3 + 2x$
2. $Q(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$, sabiendo que 2 es raíz.
3. $S(x) = 8x^3 + 14x^2 - 5x - 2$ sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz.

3.2. Ecuaciones e inecuaciones

Ejercicio 3.6

Indicar si las siguientes ecuaciones son verdaderas para todo valor de las variables $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\sqrt{x^2} = x$
2. $\sqrt{x^2 + 4} = |x| + 2$
3. $\frac{x}{x+y} = \frac{1}{1+y}$
4. $\frac{16+x}{16} = 1 + \frac{x}{16}$

5. $\frac{1}{x^{-1}+y^{-1}} = x + y$
6. $\frac{2}{4+x} = \frac{1}{2} + \frac{2}{x}$
7. $(x^3)^4 = x^7$
8. $6 - 4(x + y) = 6 - 4x - 4y$

Ejercicio 3.7

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones y expresarlas de forma factorizada si es posible:

1. $x^2 + 9x - 10 = 0$
2. $x^3 - 2x + 1 = 0$
3. $x^3 + 3x^2 + x - 1 = 0$
4. $6(x + 1)(x + 6) = 0$
5. $(3x + 1)(x - 2) = 0$
6. $-2x^2 = 8x$
7. $x^2 + 6x - 1 = (x - 1)(x + 7)$
8. $\sin(x) = -1$
9. $\cos(x) = 0$
10. $\log_{10}(x) + \log_{10}(5) = \log_{10}(20)$
11. $2\log_{10}(x) - \log_{10}(4) = 1$
12. $e^{2x} = 25$
13. $|x| = 5$
14. $|x - 3| = |2x + 1|$

Ejercicio 3.8

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 0 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + y = 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = 2 \\ x - \frac{y}{4} = 1 \end{cases}$

Ejercicio 3.9

Hallar

1. La ecuación de la recta que pasa por $P = (2, 3)$ y $Q = (4, 3)$.
2. La ecuación de la recta paralela a $y = 3x + 5$ y que pasa por $N = (1, 2)$.
3. La ecuación de la recta perpendicular a $y = -2x + 4$ y que pasa por $F = (0, -1)$.

Ejercicio 3.10

Determinar para qué valores de x son ciertas las siguientes inecuaciones.

1. $4x - 2 > 3$
2. $x^2 + 4x + 1 \geq 0$
3. $x(x-1)(x-2)(x-3) < 0$
4. $4 - 3x \geq 6$
5. $1 + 5x > 5 - 3x$
6. $0 \leq 1 - x < 1$
7. $\frac{2-x}{1+x} \leq 0$
8. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > 0$
9. $\frac{x}{x-1} < \frac{2x+1}{x}$
10. $\sqrt{x+4} < x$

Ejercicio 3.11

Resolver las siguientes inecuaciones:

1. $|x| < 3$
2. $|x| \geq 3$
3. $|x - 4| < 1$
4. $|x + 5| \geq 2$
5. $|5x - 2| < 6$

Ejercicio 3.12

1. Se considera la región que incluye los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente: $y \geq x^2$ y $y \leq 2x + 3$. Dibujar dicha región.
2. Se considera la región que incluye los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente: $y \leq -x^2 + 4$ y $y \geq -x + 1$. Dibujar dicha región.
3. Se considera la región que incluye los puntos (x, y) que satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente: $x^2 + y^2 \leq 4$ y $y \geq 0$. Dibujar dicha región.

4. Funciones

Ejercicio 4.1

1. Se considera $X = \{-3, -1, 0, 2, 4, 7\}$ como dominio de f y $B = \{-2, -1, 0, 1, 3, \pi, 8, 10\}$ su codominio tal que $f(-3) = 0,\ f(-1) = 8,\ f(0) = \pi,\ f(2) = 8,\ f(4) = 3,\ f(7) = 1.$ Representar mediante un diagrama de flechas y efectuar el gráfico de f en un sistema de ejes cartesianos.
2. Se considera $g : \mathbb{R} \setminus \{0, 2\} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \frac{(2x+1)^2}{x^2-2x}$, calcular $g(-1)$, $g(3)$ y $g(-\pi)$.

Ejercicio 4.2

Hallar el dominio más amplio posible de las siguientes funciones reales:

1. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$.

2. $g(x) = \ln\left(\frac{x^2-4}{x}\right)$.

3. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x+1}$.

Ejercicio 4.3

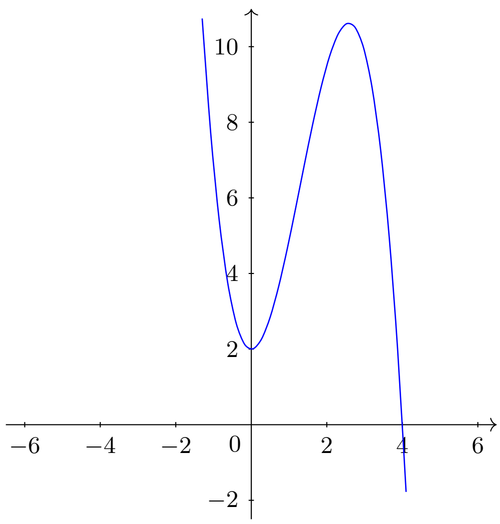
Analizar si las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

1. $f\colon [0,+\infty) \to [-2,+\infty)$, $f(x) = x^2 - 2$.

2. $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3 - 3x + 2$. ¿Se puede cambiar el dominio de g (sin cambiar el codominio) para que sea biyectiva?

Ejercicio 4.4

Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que su gráfico se representa en la siguiente figura:



Sin encontrar la expresión de f, hallar el gráfico de las siguientes funciones:

1. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(x) + 1$.
2. $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $i(x) = f(x) - 2$.
3. $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = f(x+1)$.
4. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = f(x-1)$.
5. $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $m(x) = f(-x)$.
6. $n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $n(x) = -f(x)$.

7. $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = -f(-x)$.
8. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $p(x) = 2f(x)$.

Ejercicio 4.5

Graficar las siguientes funciones:

1. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \leq 0 \\ x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$
2. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ -3 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$
3. $j : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R}$ tal que $j(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$
4. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $l(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Ejercicio 4.6
Para los siguientes pares de funciones calcular $f \circ g$, $g \circ f$ y $f + g$.

1. $f(x) = 2x + 1$, $\qquad g(x) = x^3 - x^2 - 4$
2. $f(x) = |2x + 1|$, $\qquad g(x) = x^2 + x + 1$

Ejercicio 4.7
Se consideran la funciones $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3$ y $g \colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Calcular $f \circ g$ y $f + g$. ¿Cuál es su dominio? ¿Es posible calcular $g \circ f$? ¿Cuál es el dominio más amplio posible de $g \circ f$?.

Ejercicio 4.8
Escribir los siguientes enunciados en lenguaje matemático:

- f es una función de dominio y codominio el conjunto de los reales, tal que para todo elemento real entre -1 y 1, se tiene que su imagen funcional está entre 0 y 1".
- f es una función de dominio $A \subset \mathbb{R}$ y codominio $B \subset \mathbb{R}$, tal que para todo elemento del codominio existe una preimagen en el dominio.

- f es una función de dominio y codomino reales que tiene máximo y mínimo.
- f es una función de dominio $A \subset \mathbb{R}$ y codominio $B \subset \mathbb{R}$ que tiene dos raíces.

5. Funciones: límites y continuidad

5.1. Límites

Ejercicio 5.1

Determinar existencia y calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 1} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
2. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$
3. $\lim_{x \to 0} \frac{x^4-2x^3}{x^3-x^2}$
4. $\lim_{x \to a} \frac{x^2-a^2}{x-a}$
5. $\lim_{x \to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$
6. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
7. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-x}{x-1}$
8. $\lim_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$
9. $\lim_{x \to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Ejercicio 5.2

Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

1. $\lim_{x \to +\infty} 2x + 3 - (2(x+5) + 3)$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+3}{(2(x+5)+3)}$
3. $\lim_{x \to +\infty} \frac{(x-1)^2}{x^2}$
4. $\lim_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^2 + x - 1}$
5. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x-3}$
6. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x+1}{x^5-x^4+3x^3-2}$
7. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}$
8. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$

5.2. Continuidad

Ejercicio 5.3

Determinar qué condiciones deben cumplir $a, b \in \mathbb{R}$ para que la función f sea continua:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x) & \text{si } x < 1 \\ ax + b & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

5.3. Derivadas

Ejercicio 5.4

Calcular la derivada de las siguientes funciones cuya expresión es:

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 - 5x + 7$
2. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$
3. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$
4. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}$
5. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$
6. $f(x) = x\ln(x) - x$
7. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$
8. $f(x) = \left(\sqrt[5]{x+1}\right)^2$
9. $f(x) = \sin^3(x)$
10. $f(x) = \sin\left(x^3\right)$
11. $f(x) = \sin(\cos(x))$
12. $f(x) = e^{\frac{1}{x^2+1}}$

Ejercicio 5.5

En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

1. $f(x) = x^2$, $p = (3, 9)$
2. $\cos(x)$, $p = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$
3. $\frac{x}{x^2+1}$, $p = (0, 0)$
4. $f(x) = \sqrt{9+x^2}$, $p = (4, 5)$

Ejercicio 5.6

Sean f y g dos funciones reales de las que se sabe que: $f(2) = 1$, $g(2) = 3$, $f'(2) = -1$, $g'(2) = 3$. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones, justificando.

1. $(f+g)'(2) = 2$
2. $(f.g)'(2) = 3$
3. g es continua en $x = 2$
4. siendo $h : h(x) = x + f(x)$, se cumple que $h'(2) = 0$

6. Trigonometría

Ejercicio 6.1

Usando el círculo trigonométrico completar la tabla.

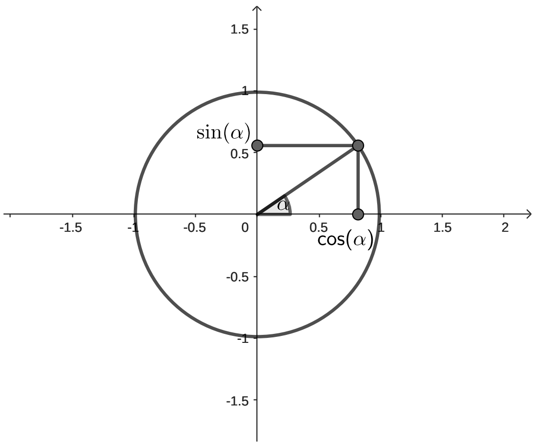


Figura 1: Círculo trigonométrico.

α	$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0			
$\pi/6$		$1/2$	
$\pi/4$			
$\pi/3$		$\sqrt{3}/2$	
$\pi/2$			$-$
π			
$4\pi/3$			
$7\pi/6$			
$3\pi/2$			$-$
$7\pi/4$			

Ejercicio 6.2

Sea $0 < \theta < \pi/2$. Usando el círculo trigonométrico calcular en función de $\sin(\theta)$ y $\cos(\theta)$ el seno y coseno de los siguientes ángulos:

1. $\frac{\pi}{2} - \theta$
2. $\frac{\pi}{2} + \theta$
3. $\pi + \theta$
4. $\pi - \theta$
5. $\frac{3\pi}{2} + \theta$
6. $\frac{3\pi}{2} - \theta$

Ejercicio 6.3

Resolver en $\mathbb{R}$ las siguientes ecuaciones trigonométricas:

1. $\cos(x) = \frac{1}{2}$
2. $\operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2}) = 0$
3. $\cos^2(x) = 1$
4. $\tan(x) = -1.$

7. Aplicaciones

Ejercicio 7.1

Juan decide comprarse un celular nuevo, luego de ver distintos modelos selecciona su favorito. Dos casas de telefonía, Alfa y Bravo venden ese celular a $U\$S$ 900.

La casa Alfa al entrar en su semana aniversario decide hacer un descuento del 20 %. Sin embargo la casa Bravo decide no quedarse atrás y realiza un descuento del 40 %. Para no perder clientela Alfa decide realizar un nuevo descuento del 20 %.

¿Donde debería comprar Juan su celular?

Ejercicio 7.2

Si usted es un mayorista que compra un producto en \$20, ¿a cuánto deberá venderlo para obtener una ganancia del 15 % de su precio de venta?

Ejercicio 7.3

Un Shopping decide quitar el IVA a todos sus productos, realizando un descuento del 18.03 %. Sin embargo el impuesto IVA aumenta en un 23 % el costo del producto. ¿Es esta una publicidad engañosa?