Curso

SISTEMAS Y CONTROL

Clase 30

Fotogramas de los pizarrones de clases filmadas

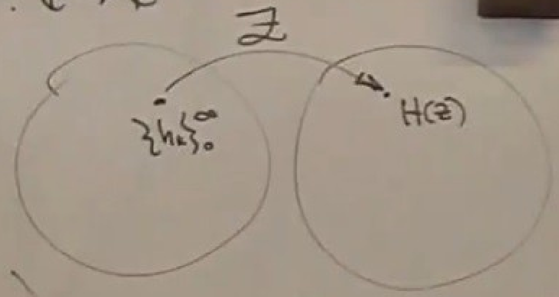
Prof. Rafael Canetti

Instituto de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Montevideo, Uruguay.
Año 2020

CONTROL en TIEMPO DISCRETO

def. dada la sucesión $\{h_k\}_0^{\infty}$ se define $\boxed{\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}} = H(z)$

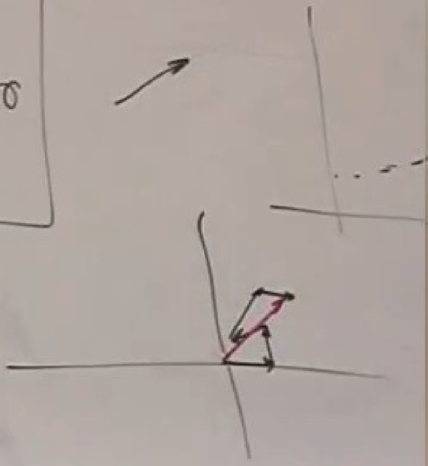
$H : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

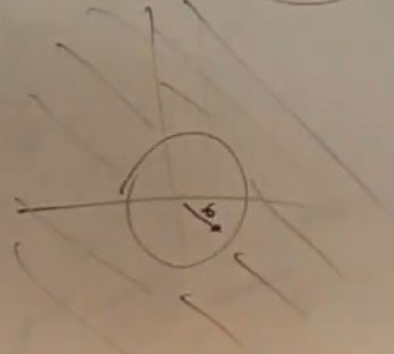


Teorema

Si $\{h_k\}$ cumple que $|h_k| \leq r^k$ entonces

$\sum_{k=0}^{\infty} h_k z^{-k}$ converge absolutamente $\forall z \, / \, |z| > r$





CONTROL en TIEMPO DISCRETO

PROPIEDADES de la T.Z.

1) Linealidad

si: $\mathcal{Z}\left[\{h_k^1\}\right]=H_1(z)$, $\mathcal{Z}\left[\{h_k^2\}\right]=H_2(z)$ $\quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{Z}\left[\alpha_1\{h_k^1\}+\alpha_2\{h_k^2\}\right]=\alpha_1 H_1(z)+\alpha_2 H_2(z)$

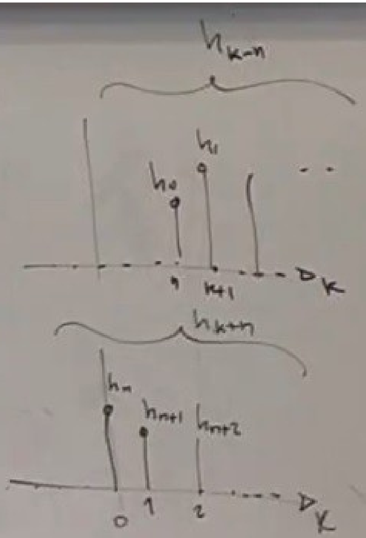
2) Retardo $n \geq 0$

$$\mathcal{Z}\left[\{h_{n-k}\}\right]=z^{-n}\,\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right]=z^{-n}H(z)$$

3) Adelanto $n \geq 0$

$$\mathcal{Z}\left[\{h_{k+n}\}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\left[h_{k+n}z^{-k}\right]=z^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[h_{k+n}z^{-(k+n)}\right]=$$

$$=z^{n}\left[\sum_{k=-n}^{\infty}h_{k+n}z^{-(k+n)}-\sum_{k=-n}^{-1}h_{k+n}z^{-(k+n)}\right]$$



CONTROL en TIEMPO DISCRETO

PROPIEDADES de la T.Z.

1) Linealidad

si: $\begin{cases} \mathcal{Z}\left[\{h^1_k\}\right] = H_1(z) \\ \mathcal{Z}\left[\{h^2_k\}\right] = H_2(z) \end{cases} \quad \forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{Z}\left[\alpha_1\{h^1_k\} + \alpha_2\{h^2_k\}\right] = \alpha_1 H_1(z) + \alpha_2 H_2(z)$

2) Retardo $n \geq 0$

$$\mathcal{Z}\left[\{h_{n-k}\}\right] = z^{-n}\,\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = z^{-n} H(z)$$

3) Adelanto $n \geq 0$

$$\mathcal{Z}\left[\{h_{k+n}\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty}\left[h_{k+n} z^{-k}\right] = z^{n}\sum_{k=0}^{\infty}\left[h_{k+n} z^{-(k+n)}\right] =$$

$j = k+n$

$$= z^{n}\left[\sum_{k=-n}^{\infty} h_{k+n} z^{-(k+n)} - \sum_{k=-n}^{-1} h_{k+n} z^{-(k+n)}\right] = z^{n}\underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} h_j z^{-j}}_{H(z)} - z^{n}\sum_{j=0}^{n-1} h_j z^{-j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{Z}\left[\{h_{k+n}\}\right] = z^{n} H(z) - z^{n}\sum_{j=0}^{n-1} h_j z^{-j}}$$

PROPIEDADES de la T.Z.

④ Traslación compleja

$$\mathcal{Z}\left[\{e^{ak} h_k\}\right] = H(z \cdot e^{-a})$$

si $\gamma = e^{a}$

$$\mathcal{Z}\left[\{\gamma^{k} h_k\}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^{k} h_k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \left(\frac{z}{\gamma}\right)^{-k} = H(z)\Big|_{\frac{z}{\gamma}} = H(z \cdot \gamma^{-1})$$

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \ldots + h_k z^{-k} + \ldots$$

⑤ Teorema del valor inicial

Sea la sucesión $\{h_k\} = \{h_0, h_1, h_2, \ldots\} \Rightarrow \boxed{h_0 = \lim_{z \to \infty} H(z)}$

con T.Z. $\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = H(z)$

CONTROL en TIEMPO DISCRETO

PROPIEDADES de la T.Z.

6 Teorema del valor final

Sea la sucesión $\{h_k\} = \{h_0, h_1, h_2, \dots, h_k, \dots\}$

con T.Z. $\mathcal{Z}[\{h_k\}] = H(z)$

Teorema a) Si $\exists \lim_{k\to\infty} h_k = h_\infty \Rightarrow \boxed{\lim_{k\to\infty} h_k = \lim_{z\to 1} (z-1)\,H(z)}$

a') Si $(z-1)H(z)$ tiene todos sus polos dentro de C.U.

Ejemplo de T.Z.

$\boxed{h_k = \gamma^k}$ $\quad \mathcal{Z}[\{\gamma^k\}] = 1 + \gamma z^{-1} + \gamma^2 z^{-2} + \gamma^3 z^{-3} + \dots + \gamma^k z^{-k} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k z^{-k}$

$$H(z) = \frac{1}{1-\gamma z^{-1}} = \frac{z}{z-\gamma} \qquad \boxed{H(z) = \frac{z}{z-\gamma}}$$

$$\frac{1}{z-\gamma}$$

CONTROL en TIEMPO DISCRETO

se conoce $H(z) \Longrightarrow$ ¿como calcular $\{h_k\}$?

$$\Rightarrow \{h_k\} = \mathcal{Z}^{-1}[H(z)]$$

1 Series de potencias

$$\underbrace{H(z)} = \mathcal{Z}[\{h_k\}] = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \cdots$$

$$E(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

$$\{h_k\} = \{0, 1, 3, 7, 15, \cdots\}$$

$$h_k = 2^k - 1$$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{z} & z^2 - 3z + 2 \\
\hline
-\cancel{z} + 3 - 2z^{-1} & z^{-1} + 3z^{-2} + 7z^{-3} + 15z^{-4} \cdots \\
\cancel{3} - 2z^{-1} & \\
-\cancel{3} + 9z^{-1} - 6z^{-2} & \\
\cancel{7z^{-1}} - 6z^{-2} & \\
-\cancel{7z^{-1}} + 21z^{-2} - 14z^{-3} & \\
+15z^{-2} - 14z^{-3} &
\end{array}
$$

SOLUCIÓN de ECS. en DIFERENCIAS

$$\boxed{y_k = \alpha_n u_k + \alpha_{n-1} u_{k-1} + \alpha_{n-2} u_{k-2} + \ldots + \alpha_0 u_{k-n} - \beta_{n-1} y_{k-1} - \beta_{n-2} y_{k-2} - \ldots - \beta_0 y_{k-n}}$$

Resolverla es:

Dado $\{u_k\} \Rightarrow$ encontrar y_k

$$U(z) = \mathcal{Z}\left[\{u_k\}\right]$$

Tomamos tr. $\mathcal{Z}$ de esta ecuación

$$Y(z) = \alpha_n U(z) + \alpha_{n-1} z^{-1} U(z) + \alpha_{n-2} z^{-2} U(z) + \ldots + \alpha_0 z^{-n} U(z) - \beta_{n-1} z^{-1} Y(z) - \beta_{n-2} z^{-2} Y(z) - \ldots - \beta_0 z^{-n} Y(z)$$

$$\left(1 + \beta_{n-1} z^{-1} + \beta_{n-2} z^{-2} + \ldots + \beta_0 z^{-n}\right) Y(z) = \left(\alpha_n + \alpha_{n-1} z^{-1} + \alpha_{n-2} z^{-2} + \ldots + \alpha_0 z^{-n}\right) U(z) \Longrightarrow \boxed{Y(z) = \frac{\alpha_n z^{n} + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_0}{z^{n} + \beta_{n-1} z^{n-1} + \beta_{n-2} z^{n-2} + \ldots + \beta_0} U(z)} \rightarrow \{y_k\} = \mathcal{Z}^{-1}\left[Y(z)\right]$$