Curso

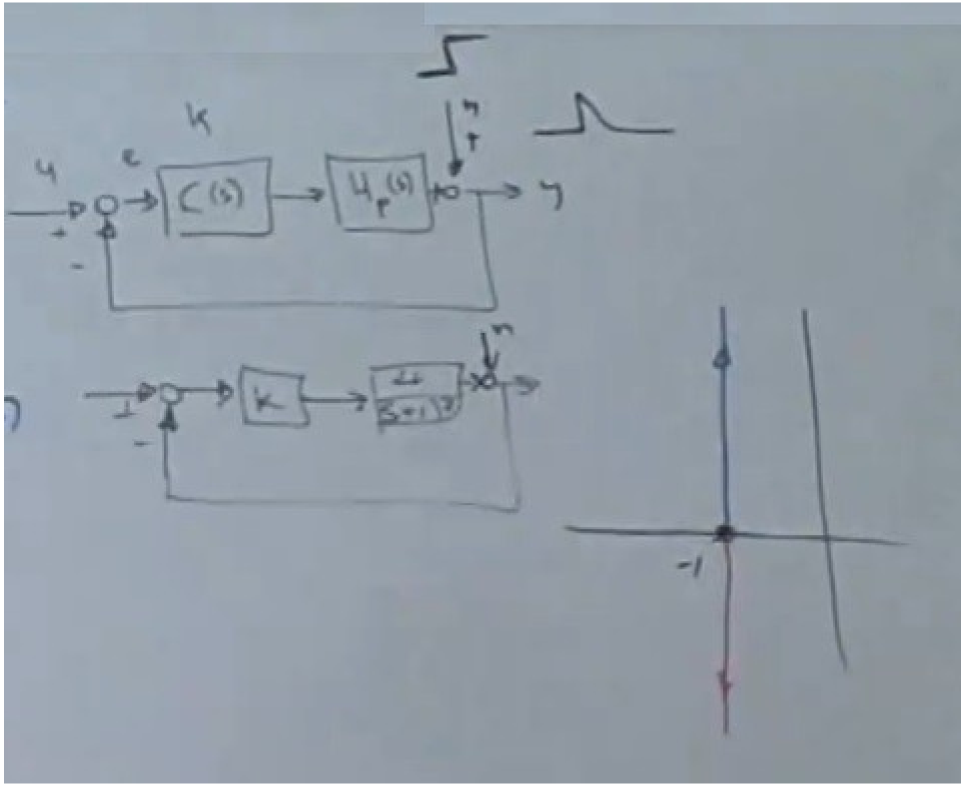
SISTEMAS Y CONTROL

Clase 29

Fotogramas de los pizarrones de clases filmadas

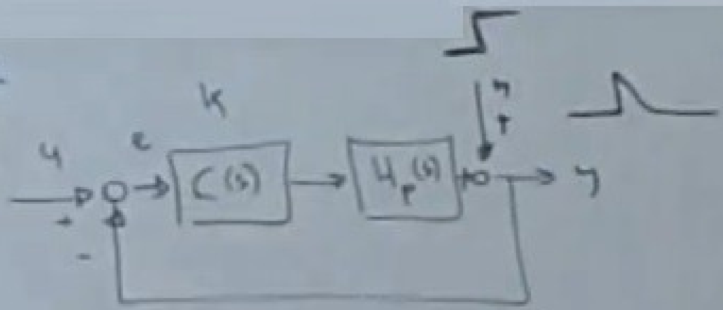
Prof. Rafael Canetti

Instituto de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Montevideo, Uruguay.
Año 2020

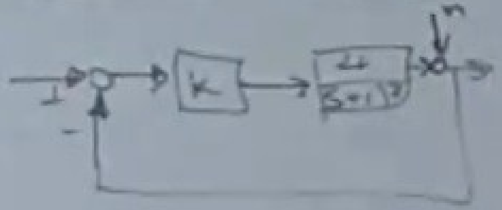


k
e
C(s)
Hp(s)
y
K
-1

$$3\left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5} = 0.2$$

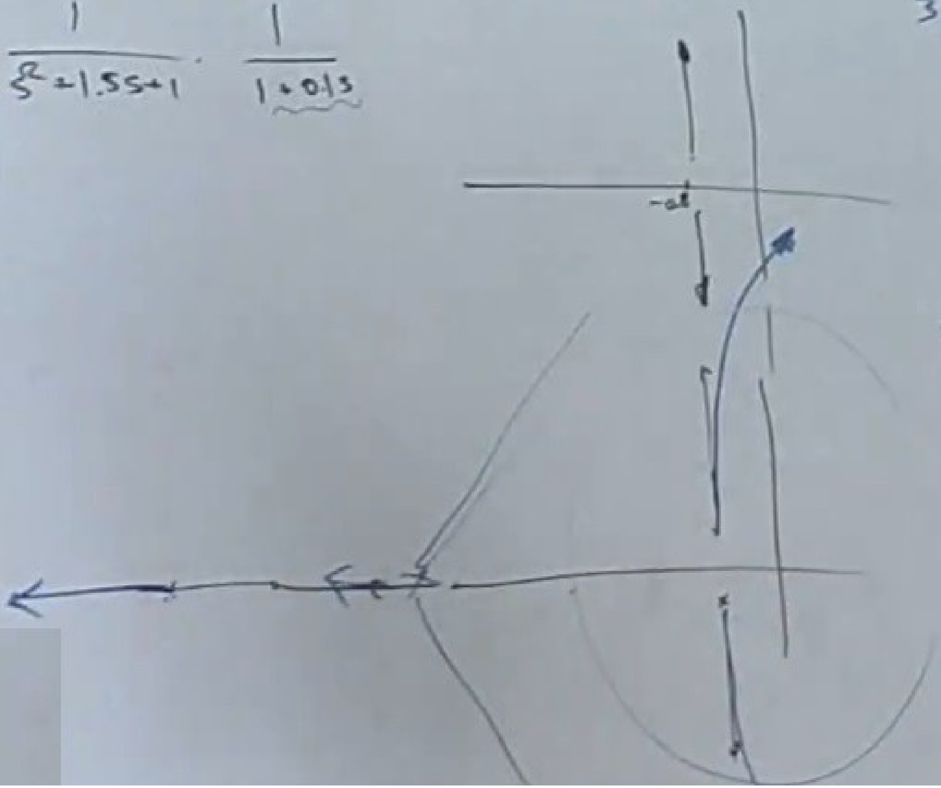


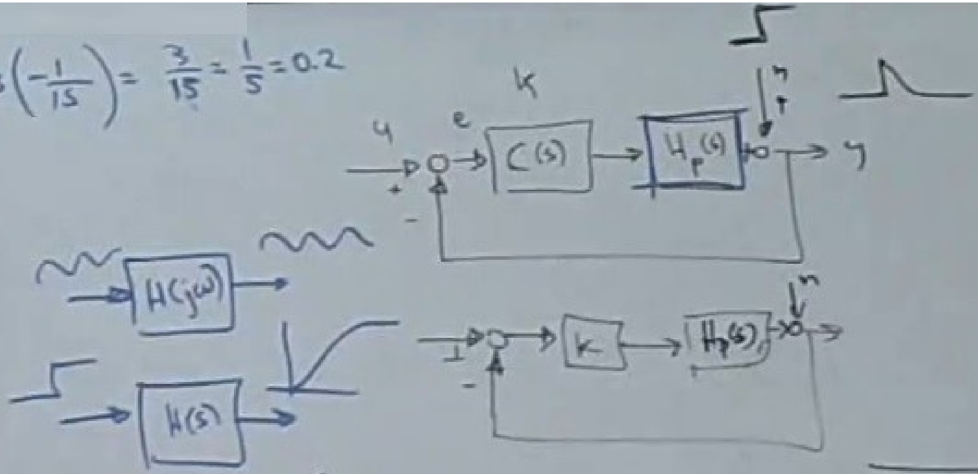
$$\frac{Y(s)}{N(s)} = \frac{1}{1+C(s)H(s)}$$

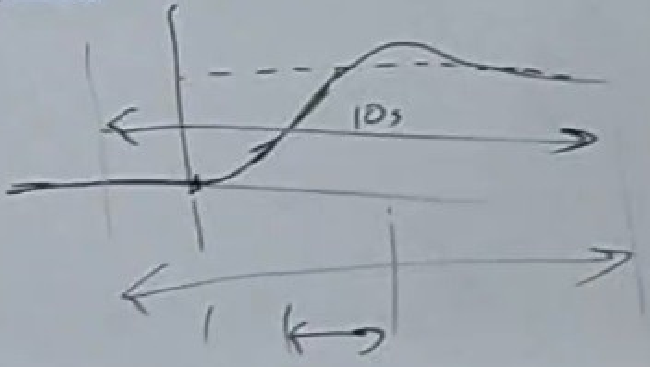


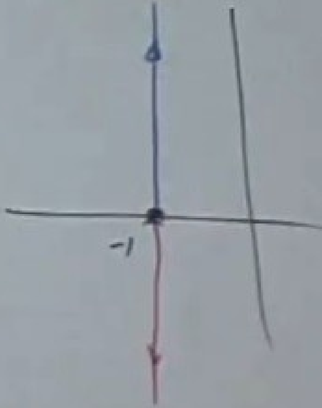
$$\frac{1}{s^2+1.5s+1}\cdot\frac{1}{1+0.1s}$$

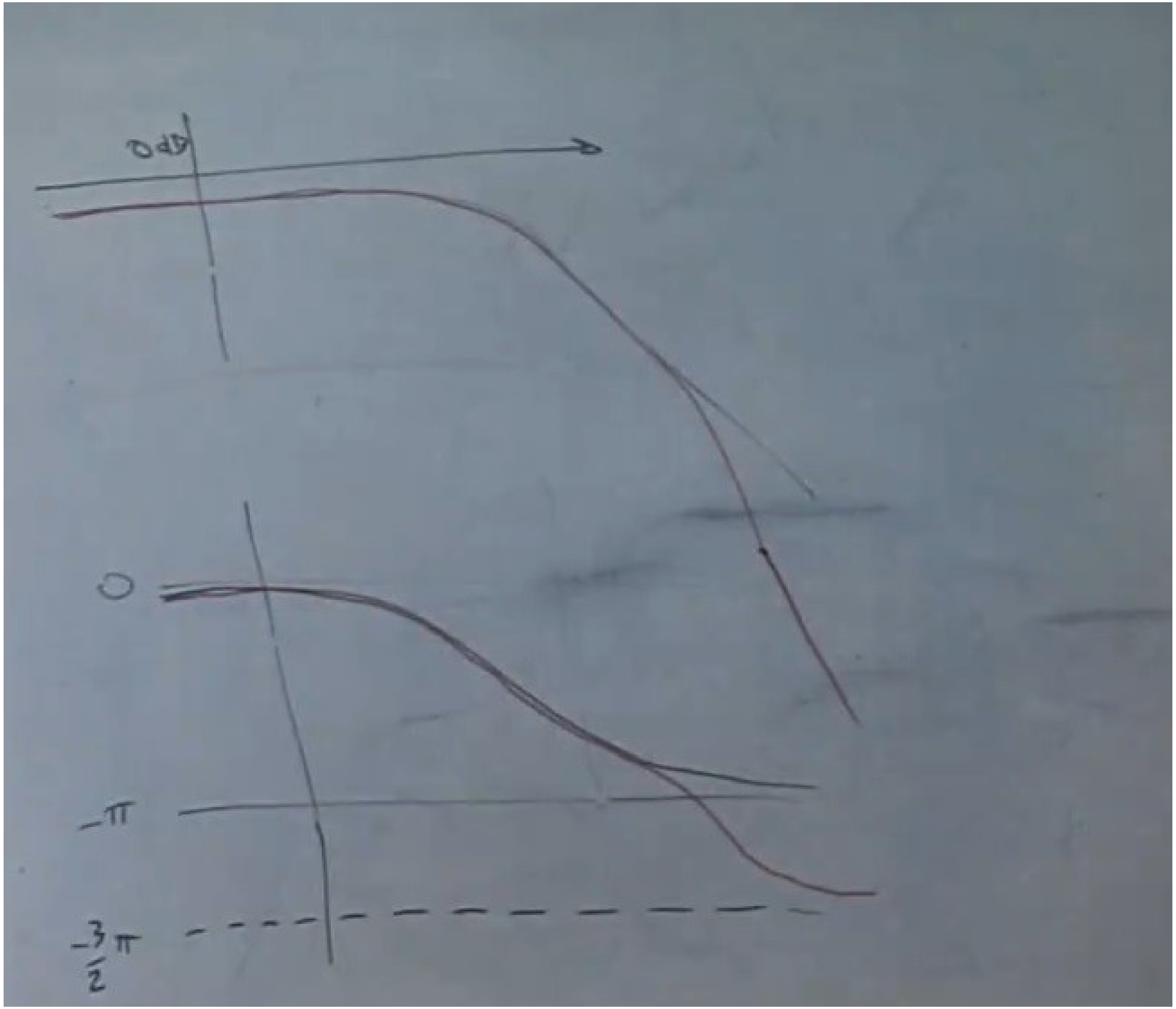
$$3\left(-\frac{1}{15}\right)=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}=0.2$$







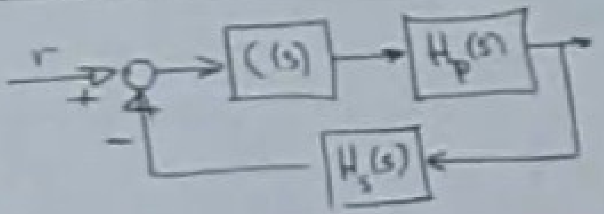


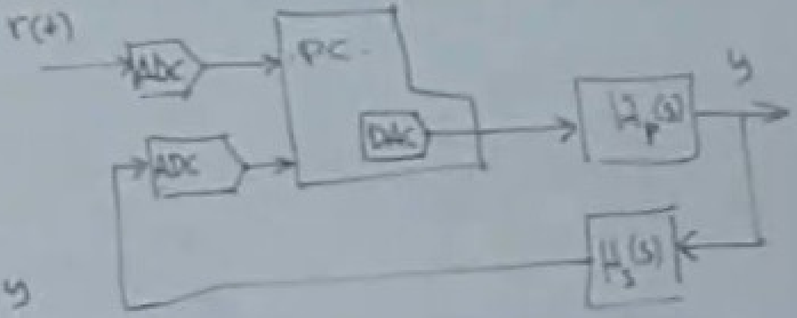


0dB
0
$-\pi$
$-\frac{3}{2}\pi$

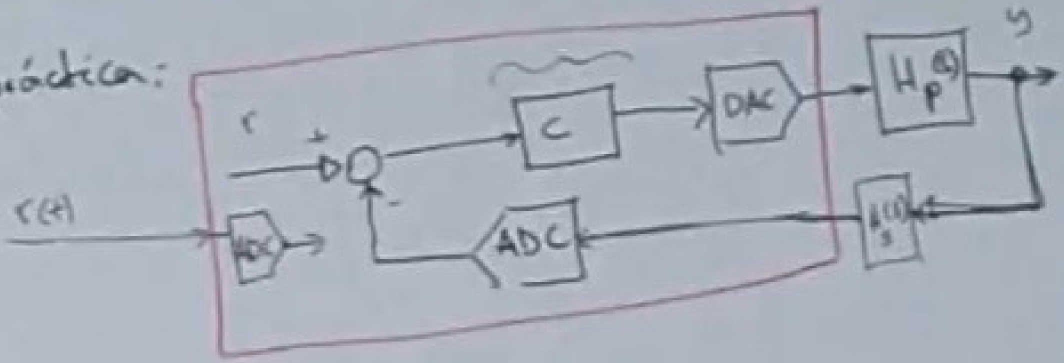
CONTROL en TIEMPO DISCRETO

en t. continuo:





en la práctica:



CONTROL en TIEMPO DISCRETO

Señales en t. discreto: $x_{[t_0,\infty)} : [t_0,\infty) \to \mathcal{C}_x$

$$[t_0,\infty) \subset \mathbb{Z} \qquad T = \mathbb{Z}$$

$u \to \boxed{} \to y$ Sistemas en t. discreto.

Modelo Malthusiano

Ej: x_k: población de ciervos en el año k en la reserva

u_k: cantidad de ejemplares que aportamos en el año k (con signo)

Cada año $\begin{cases} \text{muere una fracción } \beta \text{ de la población} \\ \text{nace " " } \alpha \text{ " " "} \end{cases}$ α, β en p.u.

→ queremos un modelo de la población x_k

→ hip: la reserva se inició en k_0, con x_0 ejemplares

$$x_{k+1} = \underbrace{x_k}_{\text{lo que había}} + \underbrace{\alpha x_k}_{\text{lo que nace}} - \underbrace{\beta x_k}_{\text{lo que muere}} + \underbrace{u_{k+1}}_{\text{lo que aportamos}}$$

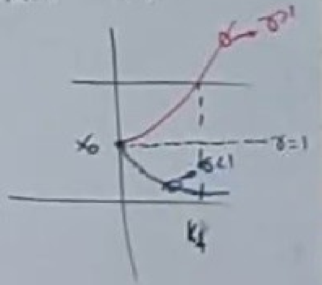
$$x_{k+1} = u_{k+1} + x_k \underbrace{(1+\alpha-\beta)}_{\gamma}$$

$\gamma > 1$

$$x_{k+1} = \gamma x_k$$

$$x_0,\ \gamma x_0,\ \gamma^2 x_0,\ \gamma^3 x_0,\ \gamma^4 x_0,\ \ldots,\ \gamma^n x_0$$

$$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n$$



$$\boxed{x_{k+1} = \gamma^{k+1} x_0} \Leftarrow \text{Solución.}$$

Ecuaciones en diferencias

$$\boxed{y_k + \alpha_1 y_{k-1} + \alpha_2 y_{k-2} + \dots + \alpha_n y_{k-n} = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \beta_2 u_{k-2} + \dots + \beta_m u_{k-m}}$$

$$\xrightarrow{u_k} \boxed{} \xrightarrow{y_k}$$

Sucesiones:

$h : [t_0, \infty) \to \mathcal{Y}_h$ con $\mathcal{Y}_h \begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^r \end{cases}$

$[t_0, \infty) \subset \mathbb{Z}$

$\{h_k\}_0^{\infty} = \{h_0, h_1, h_2, \dots \}$

$\{h_k\}_{-\infty}^{\infty} = \{\dots, h_0, h_1, h_2, \dots\}$

CONTROL en TIEMPO DISCRETO

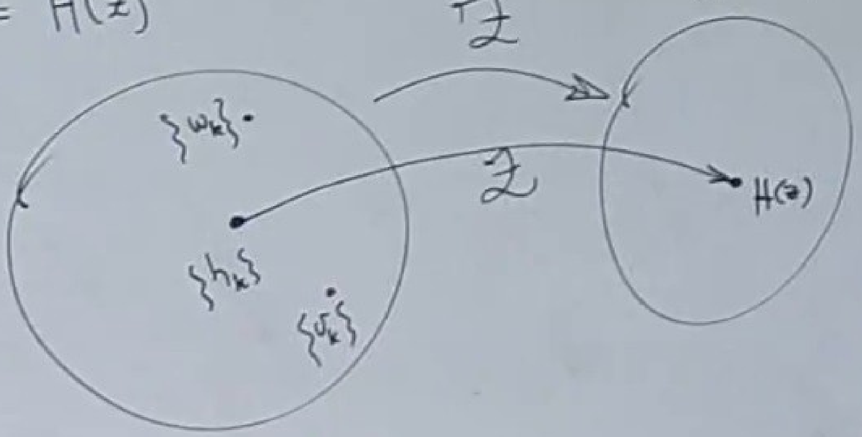
Transformada $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = H(z)$$

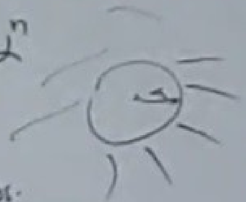
con $\{h_k\}$ sucesión de $\mathbb{R}$ causal

$$\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i} = H(z)}$$



si $|h_n| \le \alpha^n$



$\Rightarrow \sum_{i=0}^{\infty}$ converge abs. $\forall z / |z| > \alpha$

CONTROL en TIEMPO DISCRETO

Transformada $\mathcal{Z}$

$$\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = H(z)$$

con $\{h_k\}$ sucesión de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ causal

$$\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + h_3 z^{-3} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i} \quad \text{con } z \in \mathbb{C}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i} = H(z)}$$

Propiedades

1) Linealidad: Sean las sucesiones $\{h_k^1\}, \{h_k^2\}$

$$\mathcal{Z}\left[\alpha_1\{h_k^1\} + \alpha_2\{h_k^2\}\right] = \alpha_1 H_1(z) + \alpha_2 H_2(z) \qquad \begin{cases} H_1(z) = \mathcal{Z}\left[\{h_k^1\}\right] \\ H_2(z) = \mathcal{Z}\left[\{h_k^2\}\right] \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}\left[\alpha_1\{h_k^1\} + \alpha_2\{h_k^2\}\right] = \alpha_1 h_0^1 + \alpha_2 h_0^2 + (\alpha_1 h_1^1 + \alpha_2 h_1^2) z^{-1} + \ldots = \alpha_1 \sum_{i=0}^{\infty} h_i^1 z^{-i} + \alpha_2 \sum_{i=1}^{\infty} h_i^2 z^{-i} = \alpha_1 H_1(z) + \alpha_2 H_2(z)$$

2) Retardo $\{w_k\} = \{h_{k-n}\}$

$$\mathcal{Z}\left[\{h_{k-n}\}\right] = z^{-n} H(z) = z^{-n} \mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right] \qquad (\text{si } n > 0)$$

2) <u>Retardo</u> $\{w_k\} = \{h_{k-n}\}$ $\quad \mathcal{Z}\left[\{h_{k-n}\}\right] = z^{-n} H(z) = z^{-n}\,\mathcal{Z}\left[\{h_k\}\right]$ $\quad$ (si $n>0$)

<u>Demo</u>: $$\mathcal{Z}\Big[\underbrace{\{h_{k-n}\}}_{w_k}\Big] = \underbrace{h_{-n}z^{0} + h_{1-n}z^{-1} + h_{2-n}z^{-2} + \dots}_{=0} + h_0 z^{-n} + h_1 z^{-(n+1)} + h_2 z^{-(n+2)} + \dots = z^{-n} \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} h_i z^{-i}}_{H(z)}$$