Curso

SISTEMAS Y CONTROL

Clase 21

Fotogramas de los pizarrones de clases filmadas

Prof. Rafael Canetti

Instituto de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Montevideo, Uruguay.
Año 2020

Clase 21 –

- Estabilidad (3)
  - Criterios
  - Ejemplos

- Root – Locus (1)

Esta clase hace uso de las transparencias "estabilidad.pdf"

"Patologías"

1) aparece un "0" como coef. de mayor orden en $f_j(s)$, pero $f_j(s) \not\equiv 0$

2) aparece una fila nula: $f_j(s) \equiv 0$

---

(1) → (i) se aplica R-H al polin. $d(s)(s+\alpha)$ con $\alpha > 0$

(ii) se reemplaza el 0 por "ε" (a.p.), se hace $\varepsilon \to 0$, se discute según ε

---

(2) Si $f_j(s) \equiv 0$

se reemplaza $f_j(s)$ por $\frac{d\, f_{j+1}(s)}{ds}$

$$f_j(s) = Re\left\{\frac{f_{j+2}(s)}{f_{j+1}(s)}\right\}$$

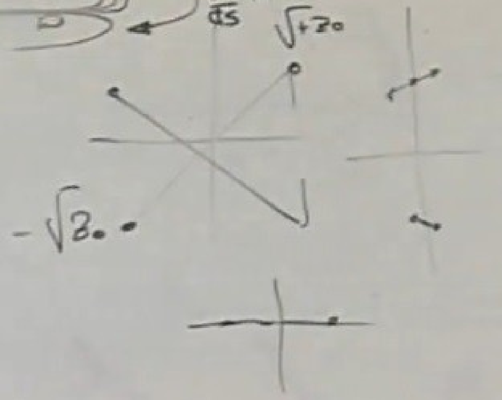
$$f_{j+2}(s) = (\alpha_j s)\, f_{j+1}(s) + f_j(s)$$

$$f_{j+3}(s) = (\alpha_{j+1} s)\, \underbrace{f_{j+2}(s)}_{f_{j+1}(s)\,\alpha_j s} + f_{j+1}(s)$$

$\underline{d(s)}$ $= 0$

f_n	d_0	d_2	d_4	...
f_{n-1}	d_1	d_3	d_5	...
f_{n-2}	x	x	x	
$f_{j+1}(s)$	x	x	x	
f_j	0	0	0	

$\frac{d}{ds} f_{j+1}(s)$



"Patologías"

1) aparece un "0" como coef. de mayor orden en $f_j(s)$, pero $f_j(s) \not\equiv 0$

2) aparece una fila nula: $f_j(s) \equiv 0$

① → (i) se aplica R-H al polin. $d(s)(s+\alpha)$ con $\alpha > 0$

(ii) se reemplaza el 0 por "ε" (a.p.), se hace $\varepsilon \to 0$, se discute según ε

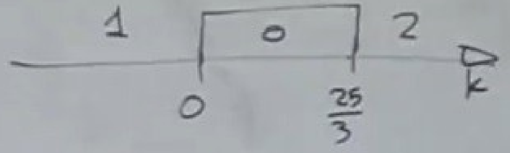
② Si $f_j(s) \equiv 0$

$$f_j(s) = Re\left\{\frac{f_{j+2}(s)}{f_{j+1}(s)}\right\}$$

se reemplaza $f_j(s)$ por $\dfrac{d f_{j+1}(s)}{ds}$

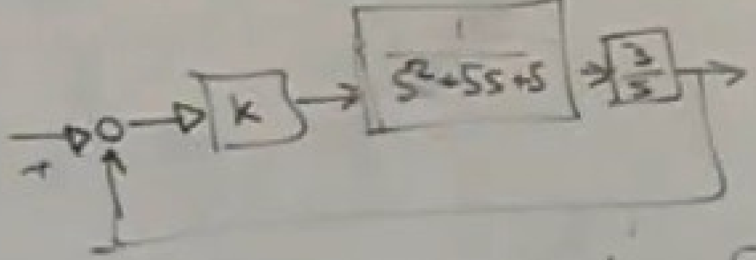
$$d(s) = s^3 + 5s^2 + 5s + 3k$$

f_3	1	5
f_2	5	$3k$
f_1	$\frac{25-3k}{5}$	
f_0	$3k$	



$$\boxed{0 < k < \frac{25}{3}} \Rightarrow \text{estable}$$

$\frac{3k}{s}$

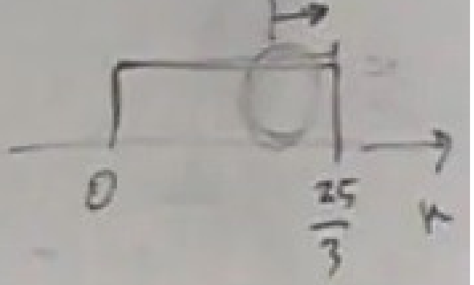


e_∞ esc ↓ 0

e_∞ rampa ↓ $= \frac{5}{3k}$

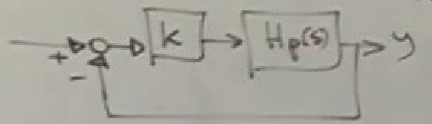
est

poco sobretiro



LUGAR de LAS RAICES (Root-Locus)

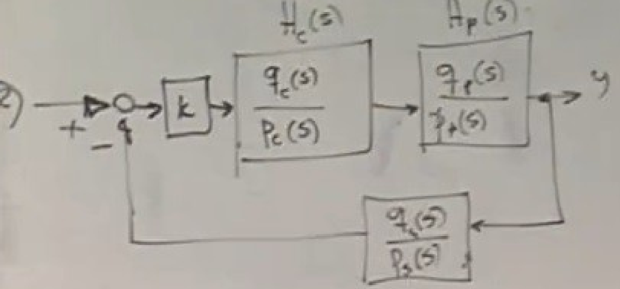
Ejemplos

1) 

$$H_p(s) = \frac{q_p(s)}{p_p(s)} = \alpha_p \frac{\prod_{i=1}^{m_p}(s - z_i^p)}{\prod_{j=1}^{n_p}(s - p_j^p)}$$

$q_p(s)$: gr m_p ; $p_p(s)$: gr n_p

$$G(s) = \frac{k\, q_p(s)}{p_p(s) + k\, q_p(s)}$$

2) 

$$G(s) = \frac{k \frac{q_c}{p_c} \cdot \frac{q_p}{p_p}}{1 + k \frac{q_c}{p_c} \cdot \frac{q_p}{p_p} \cdot \frac{q_s}{p_s}} = \frac{k\, q_c \cdot q_p \cdot p_s}{(p_c \cdot p_p \cdot p_s) + k(q_c\, q_p\, q_s)}$$

$$\boxed{\underbrace{p(s)}_{gr\ n} + k\, \underbrace{q(s)}_{gr\ m} = 0}$$

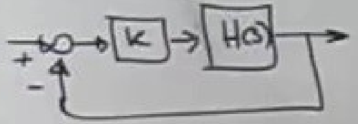
$n \geq m$

¿como varian las raices de $p(s) + k\,q(s)$ si k varia ?

de $-\infty$ a $+\infty$

LUGAR de LAS RAICES (Root-Locus)

Sea $H(s) = \dfrac{q(s)}{p(s)} = \alpha \dfrac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$ $\quad \begin{cases} q(s) \text{ gr } m \\ p(s) \text{ gr } n \\ \alpha > 0 \end{cases}$ $\quad m \leq n$



$G(s) = \dfrac{k\,H(s)}{1+k\,H(s)}$ ¿ sols. de $\begin{cases} 1+kH(s)=0 \\ p(s)+k\,q(s)=0 \end{cases}$? si $k \in \mathbb{R}$ $\qquad 1+kH(s)=0$

Def: $L.G. = \{ s / s \in \mathbb{C} \,,\ 1+kH(s)=0 \text{ para } k \in \mathbb{R} \}$ $\qquad 1+kH(s)=0 \rightarrow L.G = \{ s / s \in \mathbb{C} \quad Im\{H(s)\}=0 \}$

Def
$$\begin{aligned} L.G.P. &= \{ s / \ s \in L.G. \,,\ Re\{H(s)\} < 0 \} \\ L.G.N &= \{ s / \ s \in L.G \,,\ Re\{H(s)\} > 0 \} \end{aligned}$$

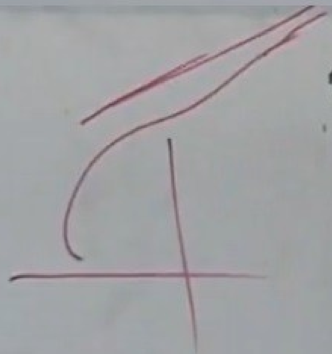
Reglas de construcción del L.G.P.

origen y fin

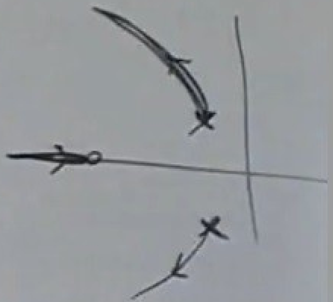
① El L.G.P. esta constituido por $\max(m,n)=n$ ramas independientes

– n ramas comienzan $(k\to 0)$ en los polos del lazo abierto $(H(s))$

– m ramas terminan $(k\to\infty)$ en los ceros del lazo abierto $(H(s))$



$p(s)+k\,q(s)=0$



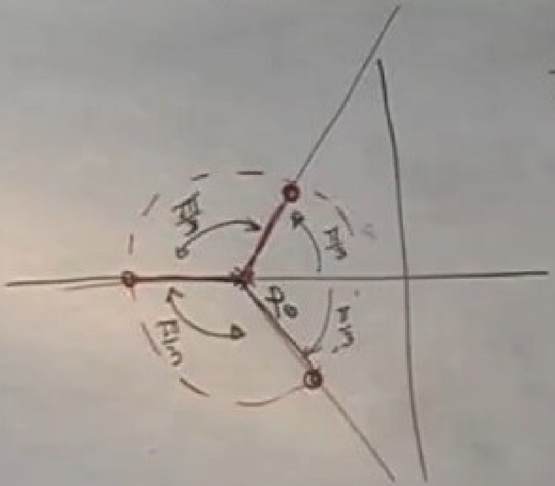
② Asintotas

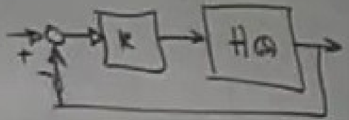
Si $n>m$, entonces $n-m$ ramas terminan $(k\to\infty)$ asintoticamente en las sols. de

$$(s-c)^{n-m}+k=0$$

donde C (centroide) $$C=\frac{\sum_{j=1}^{n} p_j-\sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$$

$$H(s) = \frac{1}{(s-p_0)^n}$$



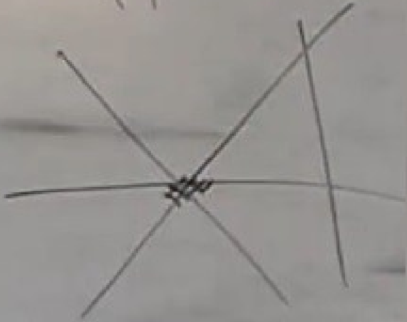


$$G(s) = \frac{kH(s)}{1+kH(s)}$$

$$1 + k\frac{1}{(s-p_0)^n} = 0$$

$$\rightarrow \boxed{(s-p_0)^n + k = 0}$$

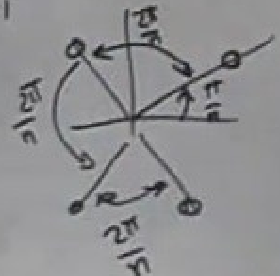
$$(s-p_0)^n = -k \longrightarrow s - p_0 = \sqrt[n]{-k}$$



$$\Rightarrow \boxed{s = p_0 + \sqrt[n]{-k}} \qquad -k = |k|\, e^{j\pi}$$

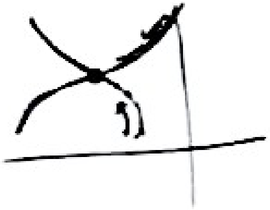
$$s = p_0 + \sqrt[n]{|k|} \cdot e^{j\frac{\pi}{n} + \frac{2l\pi}{n}} \qquad l = 0, 1, 2, n-1$$

$$\sqrt[n]{-k}$$

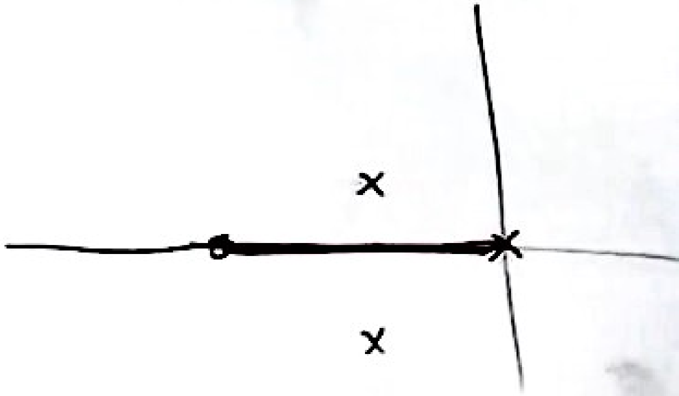


③ **L.G.P. sobre el eje real**

$\in$ al L.G.P. $s_0 \in \mathbb{R}$ / s_0 tiene a su derecha un # impar de singularidades de $H(s)$ sobre el eje real.



④ **Puntos múltiples**



s_0 es pt. múltiple del L.G.P.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 1) \in \text{L.G.P.} \\ 2) \left.\dfrac{dH(s)}{ds}\right|_{s=s_0} = 0 \end{cases}$$