Curso

SISTEMAS Y CONTROL

Clase 12

Fotogramas de los pizarrones de clases filmadas

Prof. Rafael Canetti

Instituto de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Montevideo, Uruguay.
Año 2020

Recordatorio: Habíamos obtenido la evolución del estado

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x(t_0) = x_0 \\ u(t),\ t \geq t_0 \end{array}\right\} \text{conocidos.}$$

$$x(t) = \underbrace{\Phi(t, t_0)\, x_0}_{x_h(t)} + \underbrace{\int_{t_0}^{t} \Phi(t, \sigma)\, B_1\, u(\sigma)\, d\sigma}_{x_\sigma(t)}$$

La matriz de transición de estados es la matriz exponencial

MATRIZ EXPONENCIAL

$\lambda \in \mathbb{C}$ $\quad e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^k t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^k}{k!}$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $\quad e^{At} \triangleq I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$

Propiedades

1) e^{At} es absolutamente convergente $\forall t \in \mathbb{R}$, $t < \infty$
2) e^{At} es unif. conv. $\forall$ intervalo finito $\subset \mathbb{R}$
3) e^{At} es no singular $\forall t$ finito
4) Si $A = $ cte $\quad \boxed{\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}}$!

Demo.

$\Phi(t,t_0)$ es la sol. única $\begin{cases} \dot{\Phi}(t,t_0) = A\,\Phi(t,t_0) \\ \text{con } \Phi(t_0,t_0) = I \end{cases}$

$$\frac{d e^{A(t-t_0)}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[I + A(t-t_0) + A^2 \frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + A^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} + \dots \right] = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{(t-t_0)^k}{k!} \right)$$

$$= \cancel{0} + A + A^2 \cdot \frac{2}{2!}(t-t_0) + \dots + A^k \frac{k(t-t_0)^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k (t-t_0)^{k-1} k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} A^k \frac{(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= A \sum_{j=0}^{\infty} A^j \frac{(t-t_0)^j}{j!} = A e^{A(t-t_0)}$$

$j = k-1$

Cond. inic. en t_0

$$\boxed{e^{A(t-t_0)} = I}$$

MATRIZ EXPONENCIAL

$$\lambda \in \mathbb{C} \qquad e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \lambda^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^k}{k!}$$

$$A \in \mathbb{C}^{n \times n} \qquad e^{At} \triangleq I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!}$$

Propiedades

1) e^{At} es absolutamente convergente $\forall t \in \mathbb{R}$, $t < \infty$
2) e^{At} es unif. conv. $\forall$ intervalo finito $\subset \mathbb{R}$
3) e^{At} es no singular $\forall t$ finito
4) Si A = cte $\boxed{\Phi(t, t_0) = e^{A(t - t_0)}}$!

MÉTODOS de CÁLCULO de e^{At} $\qquad t_0 = 0$

1) Método directo

$S_0 = I$

$S_1 = S_0 + At$

$S_2 = S_1 + \underbrace{A^2 \frac{t^2}{2!}}$

$\vdots$

$S_l = \sum_{k=0}^{l} A^k \frac{t^k}{k!}$

MATRIZ EXPONENCIAL

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} & e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \lambda^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^k}{k!} \\ A \in \mathbb{C}^{n\times n} & e^{At} \triangleq I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \end{cases}$$

Propiedades

1) e^{At} es absolutamente convergente $\forall t \in \mathbb{R}$, $t < \infty$
2) e^{At} es unif. conv. $\forall$ intervalo finito $\subset \mathbb{R}$
3) e^{At} es no singular $\forall t$ finito
4) Si A = cte $\boxed{\Phi(t,t_0) = e^{A(t-t_0)}}$!

METODOS de CALCULO de e^{At}

$t_0 = 0$

2) Diagonalización

Si A es diagonalizable $\Rightarrow \exists\, T$ invertible, Γ diagonal / $A = T^{-1}\Gamma T$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \Gamma_i \in \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad e^{\Gamma t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = T^{-1}T + \overbrace{T^{-1}\Gamma T}^{1}\, t + \overbrace{(T^{-1}\Gamma \cancel{T})(\cancel{T^{-1}}\Gamma T)}^{2} \frac{t^2}{2!} + \dots + \overbrace{(T^{-1}\Gamma \cancel{T})(\cancel{T^{-1}}\Gamma T)\dots(T^{-1}\Gamma T)}^{k \text{ veces}} \frac{t^k}{k!} + \dots =$$

$$= T^{-1}T + T^{-1}\Gamma T\, t + T^{-1}\Gamma^2 T \frac{t^2}{2!} + \dots + T^{-1}\Gamma^k T \frac{t^k}{k!} + \dots = T^{-1}\underbrace{\left(I + \Gamma t + \Gamma^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \Gamma^k \frac{t^k}{k!} + \dots\right)}_{e^{\Gamma t}} T \Rightarrow \boxed{e^{At} = T^{-1} e^{\Gamma t} T}$$

MATRIZ EXPONENCIAL

$$\begin{cases} \lambda \in \mathbb{C} & e^{\lambda t} = 1 + \lambda t + \lambda^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + \lambda^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^k}{k!} \\ A \in \mathbb{C}^{n\times n} & e^{At} \triangleq I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \dots + A^k \frac{t^k}{k!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} \end{cases}$$

Propiedades

1) e^{At} es absolutamente convergente $\forall t \in \mathbb{R}$, $t < \infty$
2) e^{At} es unif. conv. $\forall$ intervalo finito $\subset \mathbb{R}$
3) e^{At} es no singular $\forall t$ finito
4) Si A = cte $\boxed{\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}}$!

METODOS de CALCULO de e^{At}

Recordemos

Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se define $d(s) = \det(sI - A)$

- $d(s)$: polinomio característico de A
- $d(s) = s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + \dots + d_n$
- $d(s) = 0$: ecuación característica de A
- $\lambda_i \in \mathbb{C} \,/\, d(\lambda_i) = 0$: autovalores de A

3) Por tr. de Laplace:

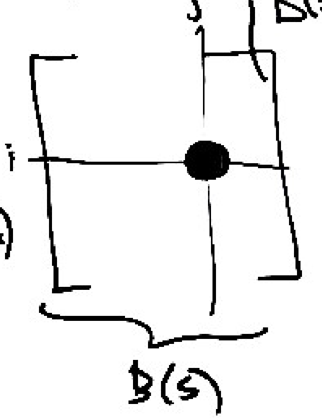
$$\boxed{\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI - A)^{-1}} \rightarrow \boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]}$$

Inversión de (sI-A)

Proposición $\quad \mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI-A)^{-1} = \dfrac{B(s)}{d(s)}$ con $d(s) = \det(sI-A)$.

$B(s) = B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \dots + B_{n-1}$ $\quad B_j$: matrices ctes.

$$\begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI-A)}$$



Se invierte según regla de Cramer:
bij(s) = -1 $^{(i+j)}$ det Mji(s)

Proposición $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI-A)^{-1} = \dfrac{B(s)}{d(s)}$ con $\begin{cases} d(s) = \det(sI-A) \\ B(s) = B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \dots + B_{n-1} \end{cases}$ B_j: matrices ctes.

Proposición: Las matrices B_j satisfacen la recursión:

$$\begin{cases} B_0 = I \\ B_1 = B_0 A + d_1 I \\ B_2 = B_1 A + d_2 I \\ B_3 = B_2 A + d_3 I \\ \vdots \\ B_{n-1} = B_{n-2} A + d_{n-1} I \\ \underline{0} = B_{n-1} A + d_n I \end{cases}$$

como $(sI-A)^{-1} = \dfrac{B(s)}{d(s)} \Rightarrow d(s)\, I = B(s)(sI-A)$

$$\left[B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \dots + B_{n-2} s + B_{n-1}\right](sI-A) = \left(s^n + d_1 s^{n-1} + d_2 s^{n-2} + d_3 s^{n-3} + \dots + d_{n-1} s + d_n\right) I$$

pot	
s^n	$B_0 = I$
s^{n-1}	$B_1 - B_0 A = d_1 I$
s^{n-2}	$B_2 - B_1 A = d_2 I$
$\vdots$	$B_3 - B_2 A = d_3 I$
s	$B_{n-1} - B_{n-2} A = d_{n-1} I$
s^0	$-B_{n-1} A = d_n I$

Proposición $\mathcal{L}\{e^{At}\} = (sI-A)^{-1} = \dfrac{B(s)}{d(s)}$ con $\begin{cases} d(s) = \det(sI-A) \\ B(s) = B_0 s^{n-1} + B_1 s^{n-2} + B_2 s^{n-3} + \dots + B_{n-1} \end{cases}$ B_j: matrices ctes.

Proposición: Las matrices B_j satisfacen la recursión:

$$\begin{cases} B_0 = I \\ B_1 = B_0 A + d_1 I \\ B_2 = B_1 A + d_2 I \\ B_3 = B_2 A + d_3 I \\ \vdots \\ B_{n-1} = B_{n-2} A + d_{n-1} I \\ \underline{O} = B_{n-1} A + d_n I \end{cases}$$

TEOREMA de CAYLEY-HAMILTON

Toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ satisface su ec. característica: $\boxed{d(\underline{A}) = \underline{O}}$

donde $d(s) = \det(sI-A)$

$d(M) = M^n + d_1 M^{n-1} + d_2 M^{n-2} + \dots + d_n I$

Demo: $B_0 = I$

$B_1 = A + d_1 I$

$B_2 = A^2 + A d_1 + d_2 I$

$B_3 = A^3 + A^2 d_1 + A d_2 + d_3 I$

$B_{n-1} = A^{n-1} + d_1 A^{n-2} + d_2 A^{n-3} + \dots + d_{n-2} A + d_{n-1} I$

$O = A^n + d_1 A^{n-1} + d_2 A^{n-2} + \dots + d_{n-1} A + d_n I$

4) Cálculo de e^{At} por Cayley-Hamilton

$$\begin{cases} e^{\lambda t} = 1+\lambda t+\lambda^2 \frac{t^2}{2!}+\dots+\lambda^k\frac{t^k}{k!}+\dots \\ e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!}+\dots+A^k\frac{t^k}{k!}+\dots \end{cases}$$

$$e^{Mt} = Q(M)\,d(M) + R_t(M)$$

$$e^{At} = Q(A)\,d(A)+R_t(A) = \alpha_0(t)A^{n-1}+\alpha_1(t)A^{n-2}+\dots+\alpha_{n-1}(t)I$$

$$e^{\Gamma t}\Big|_{\Gamma=\lambda} = Q(\Gamma)\,\overset{0}{d(\lambda)}\Big|_{(\Gamma)} + R_t(\Gamma)\Big|_{\Gamma=\lambda} \Rightarrow \boxed{e^{\lambda t}=R_t(\lambda)=\alpha_0(t)\lambda^{n-1}+\alpha_1(t)\lambda^{n-2}+\dots+\alpha_{n-1}(t)}$$

ejemplo

$$\begin{bmatrix}\dot z(t)\\ \ddot z(t)\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-\frac{k}{m}&0\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}z(t)\\ \dot z(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{m}\end{bmatrix}F \qquad \frac{k}{M}=1 \Rightarrow A=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$d(s)=\det(sI-A)=s^2+1 \Rightarrow \begin{matrix}\lambda=j\\ \lambda=-j\end{matrix}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix}z(t)\\ \dot z(t)\end{bmatrix} \qquad x(0)=x_0$$

$$x_h(t)=e^{At}x_0 \quad ; \; e^{At}? \qquad \boxed{e^{At}=\alpha_0 A+\alpha_1 I}$$

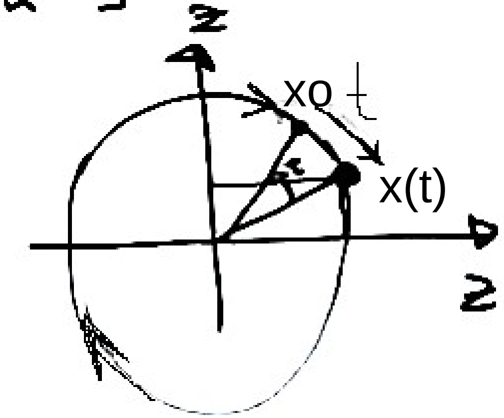
$$\begin{cases} e^{jt}=\alpha_0 j+\alpha_1 \\ e^{-jt}=\alpha_0(-j)+\alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} e^{jt}-e^{-jt}=2\alpha_0 j \Rightarrow \alpha_0=\dfrac{e^{jt}-e^{-jt}}{2j}=\operatorname{sen} t \\ e^{jt}+e^{-jt}=2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1=\dfrac{e^{jt}+e^{-jt}}{2}=\cos t \end{matrix}$$

$$\Rightarrow e^{At}=\operatorname{sen} t\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}+\cos t\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t&\operatorname{sen} t\\-\operatorname{sen} t&\cos t\end{bmatrix}$$

Es un oscilador armónico. El estado rota a velocidad angular constante a partir de la condición inicial. La posición z y la velocidad z’ son las proyecciones sobre los ejes.

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \dots + A^k\frac{t^k}{k!} + \dots$$

$$x_h(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1,0} \\ \dot z_{1,0} \end{bmatrix}$$



$$x(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot z(t) \end{bmatrix} \quad x(0) = x_0$$

$$x_h(t) = e^{At} x_0$$

$$\begin{cases} e^{jt} = \alpha_0 j + \alpha_1 \\ e^{-jt} = \alpha_0(-j) + \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{At} =$$