

Curso

SISTEMAS Y CONTROL

Clase 09

Fotogramas de los pizarrones de clases filmadas

Prof. Rafael Canetti

Instituto de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Montevideo, Uruguay.
Año 2020

Este material fue elaborado como material de apoyo para ser utilizado por los estudiantes de este curso de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, Universidad de la República (UdelaR).

No está autorizado su uso con fines comerciales. No está autorizada su edición, recorte o modificación. Ni tampoco su uso sin indicar adecuadamente su origen.

$X' = AX + BU$ ¿es lineal?

Ejercicio resuelto por estudiante.

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

$x(t_0) = x_0$ conocida
 $u(t)$ conocida $\forall t > t_0$

S.D.P.C

$$\dot{x} = A(kx_1 + kx_2) + B(ku_1 + ku_2)$$

$$y = C(kx_1 + kx_2) + D(ku_1 + ku_2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = Ax_1 + Bu_1 \\ y_1 = Cx_1 + Du_1 \end{cases}$$

Si est. = x_1 , ent. $\Rightarrow x_1(t)$
 aplico u_1

est. = x_2 , ent. $\Rightarrow x_2(t)$
 aplico u_2

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = Ax_2 + Bu_2 \\ y_2 = Cx_2 + Du_2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= k(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \\ \Rightarrow y &= k(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$$u = ku_1 + ku_2$$

$$S^{-1}[k(u_1 + u_2)] = kS^{-1}[u_1] + kS^{-1}[u_2]$$

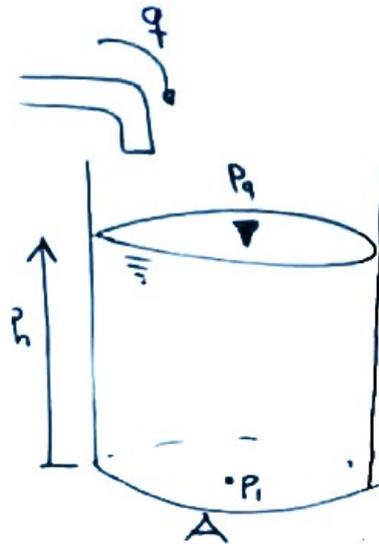
$$F[k(x_1 + x_2), k(u_1 + u_2)] = kF[x_1, u_1] + kF[x_2, u_2]$$

$$\dot{X} = k(\overbrace{Ax_1 + Bu_1}^{\dot{x}_1}) + k(\overbrace{Ax_2 + Bu_2}^{\dot{x}_2}) = k(\overbrace{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}^{\dot{x}(t)})$$

$$y = k(\underbrace{Cx_1 + Du_1}_{y_1}) + k(\underbrace{Cx_2 + Du_2}_{y_2}) = k(y_1 + y_2)$$

Modelado de Fenómenos Hidráulicos – Modelo de un tanque - Capacidad Hidráulica

MODELADO
Fenómenos hidráulicos



$$q = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(A \cdot h) = A \dot{h}$$

$$q = A \dot{h}$$

$$P_i = P_a + \underbrace{\rho g h}$$

$$\Rightarrow \underbrace{(P_i - P_a)}_P = \frac{\rho g h}{\sigma}$$

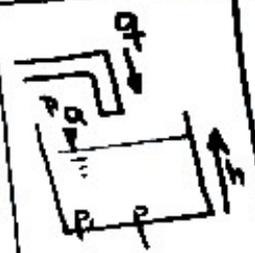
$$\Rightarrow q = \frac{A}{\sigma} \cdot \frac{d}{dt}(P_i - P_a)$$

$$\rho \approx 1 \text{ kg/cm}^3$$

FENÓMENOS HIDRÁULICOS.

variables $\left\{ \begin{array}{l} P, q \\ h, q \end{array} \right.$

leyes de conjunto: $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\text{nodo}} q_{ij} = 0 \\ \sum_{\text{malla}} \Delta p = 0 \end{array} \right.$

Nombre	Parám	Símbolo	Ley
<u>CAPACIDAD HIDR</u>	C		$q = C \frac{dp}{dt}$ $q = C'' \dot{h}$
<u>RESIST. HIDRÁULICA</u> (caudales pequeños)	R_h		$q = \frac{1}{R_h'} (P_2 - P_1)$ $q = \frac{1}{R_h''} (h_2 - h_1)$

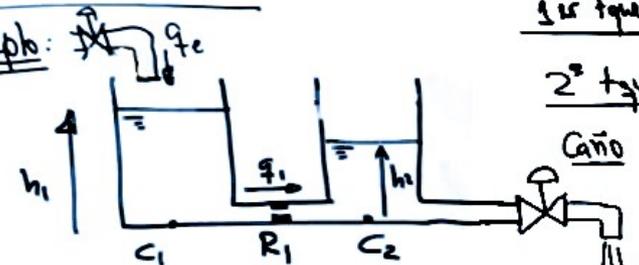
$q = C' \frac{dp_i - p_o}{dt}$

si es tanque
 $\left[C' = A \frac{h}{g} \right]$
 $\left[C'' = A \right]$



MODELADO
fenómenos hidráulicos

ejemplo:



$$u(t) = \begin{bmatrix} q_e(t) \\ q_s(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

1er tanque: $(q_e - q_1) = C_1 \cdot \dot{h}_1$
 2º tanque: $(q_1 - q_s) = C_2 \cdot \dot{h}_2$
 $q_1 = \frac{1}{R_1} [h_1 - h_2]$

$$\begin{cases} C_1 \dot{h}_1 = q_e - \frac{1}{R_1} h_1 + \frac{1}{R_1} h_2 \\ C_2 \dot{h}_2 = \frac{1}{R_1} h_1 - \frac{1}{R_2} h_2 - q_s \end{cases}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{h}_1(t) \\ \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} & \frac{1}{R_1 C_1} \\ \frac{1}{R_1 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} q_e(t) \\ q_s(t) \end{bmatrix}}_u$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_e(t) \\ q_s(t) \end{bmatrix}$$

Aspectos prácticos:

Flujo en cañería en régimen turbulento, aproximación de pequeña señal como resistencia hidráulica

Aspectos prácticos



$$Re = \frac{v D \rho}{\mu}$$

- v - veloc. media
- D - Diámetro
- ρ - densidad
- μ - viscosidad

$\times \left\{ \begin{array}{l} Re < 2000 \text{ flujo laminar} \\ Re > 4000 \text{ " turbulento} \end{array} \right.$

$$\tilde{\Delta p} \approx 2 \frac{\Delta p_0}{Q_0} \cdot \tilde{q}$$

$$q = \frac{1}{R_h} \Delta p$$

$$\Delta p = \alpha q^2$$

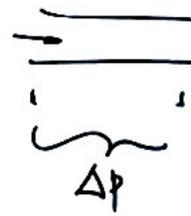
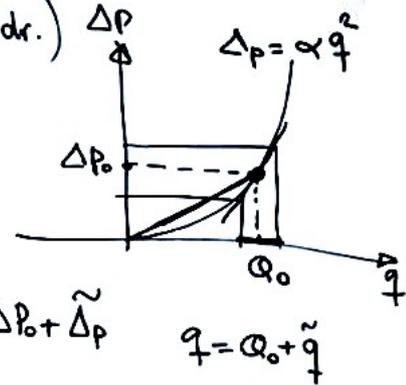
$$\Delta p_0 = \alpha Q_0^2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\Delta p_0}{Q_0^2}$$

$$\tilde{\Delta p} = \left. \frac{\partial \Delta p}{\partial q} \right|_{q=Q_0} \cdot \tilde{q}$$

$$\tilde{\Delta p} = 2\alpha q \Big|_{q=Q_0} \cdot \tilde{q} \rightarrow \tilde{\Delta p} = 2 \frac{\Delta p_0}{Q_0} \cdot \tilde{q}$$

(Resist. hidr.) Δp



Fenómenos térmicos elementales

variables $\{ \dot{q}, T \}$

leyes de conjunto: $\sum_{\text{nodo } i} \dot{q}_{ij} = 0$
 $\sum_{\text{masa}} \Delta T = 0$

Nombre	Parám	Símbolo	Ley
--------	-------	---------	-----

CAPACITANCIA
TÉRMICA

C

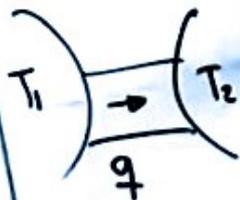


$$\dot{q} = C \frac{dT}{dt}$$

$$C = M c_p$$

RESISTENCIA
TÉRMICA

R_h



$$\dot{q} = \frac{1}{R_{th}} \cdot (T_1 - T_2)$$

$$\dot{q} \approx h(T_1 - T_a)$$

Pérdidas complejivas por transferencia (pequeña señal)
p.ej.: convección, cond. y rad.