

Curso

# **SISTEMAS Y CONTROL**

## **Clase 08**

**Fotogramas de los pizarrones de clases filmadas**

Prof. Rafael Canetti

Instituto de Ingeniería Eléctrica,  
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República  
Montevideo, Uruguay.  
Año 2020

Este material fue elaborado como material de apoyo para ser utilizado por los estudiantes de este curso de Ingeniería Eléctrica de la Facultad de Ingeniería, Universidad de la República (UdelaR).

No está autorizado su uso con fines comerciales. No está autorizada su edición, recorte o modificación. Ni tampoco su uso sin indicar adecuadamente su origen.

## MODELADO

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

---

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t) \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned}$$

---

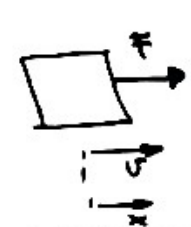

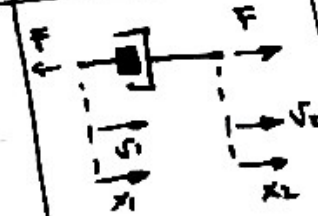
$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

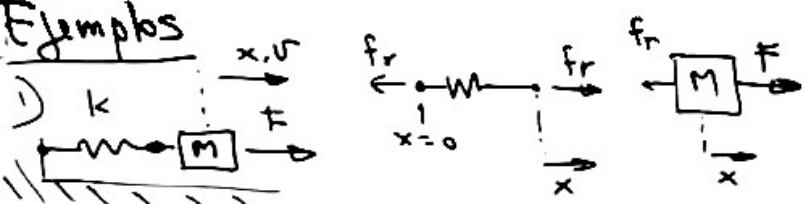
---

# FEN. MECÁNICOS de TRASLACIÓN

$F, v$   
 $F, x$

Nombre	Parám.	Simbolo	Leg
INERCIA (Masa)	M (masa)		$F = M \frac{dv}{dt}$ $F = M \ddot{x}$
ELASTICIDAD (Resorte)	K		$\frac{dF}{dt} = K (v_2 - v_1)$ $F = K (x_2 - x_1)$
FRICCIÓN	B		$F = B (v_2 - v_1)$ $F = B (\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$

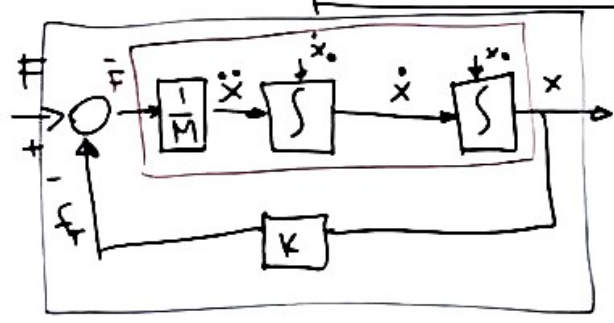
# Exemples



$$f_r = kx$$

$$M\ddot{x} = (F - f_r) = F - kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{M}x + \frac{1}{M}F$$

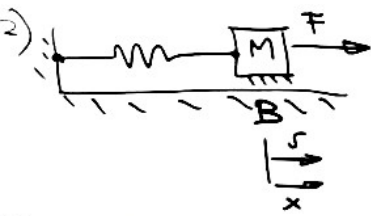


$$Z = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

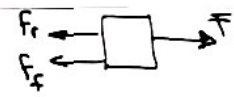
$$\dot{Z}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}}_Z = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_Z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B \underbrace{F(t)}_u$$

$$\dot{Z} = AZ + BU$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_Z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_D \underbrace{F}_u$$



$$F - f_r - f_f$$

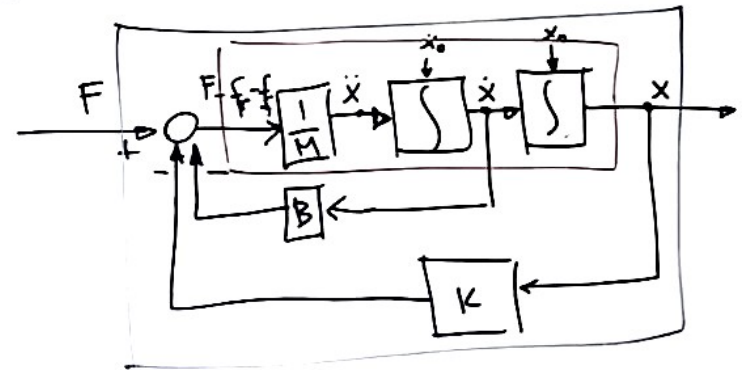


$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$



$$M\ddot{x} = F - f_r - f_f = F - kx - B\dot{x}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{M}F - \frac{k}{M}x - \frac{B}{M}\dot{x}$$

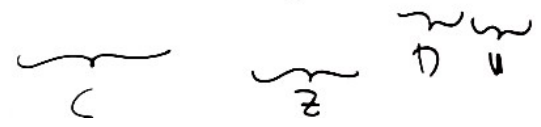


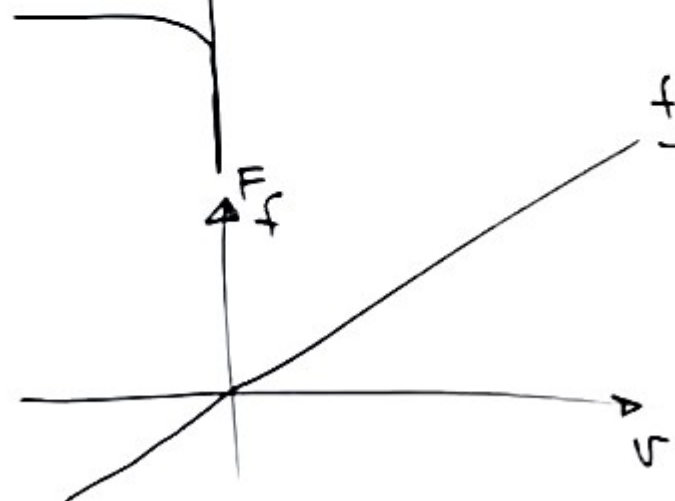
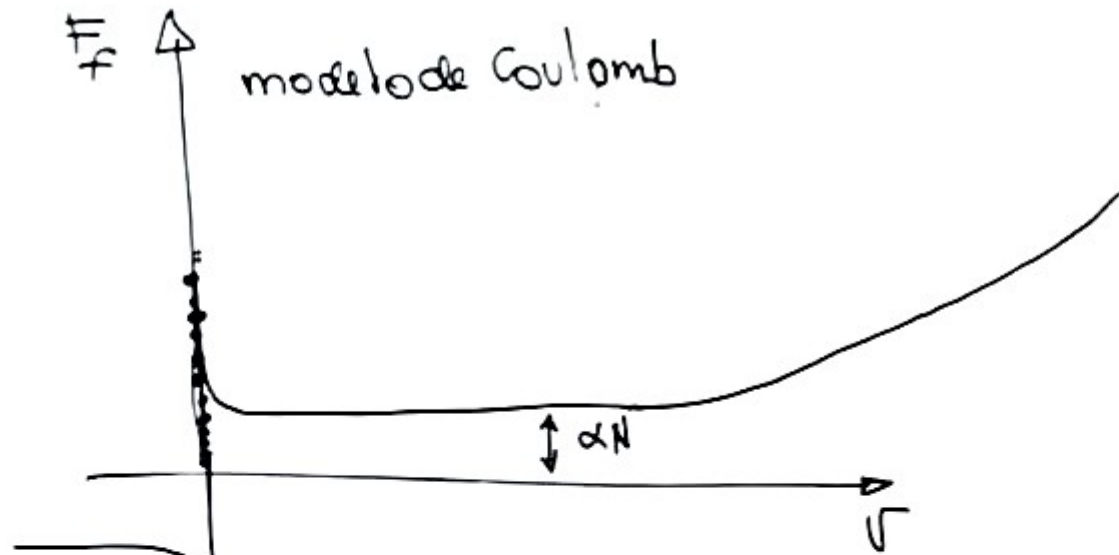
$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{k}{M} \end{bmatrix}}_A + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{B}{M} \end{bmatrix}}_B z + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix}}_B F(t)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = Az + Bu \\ y = Cz + Du \end{cases}$$

$$y(t) = \underbrace{[1 \quad 0]}_C \underbrace{\begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}}_z + \underbrace{[0]}_D F(t)$$




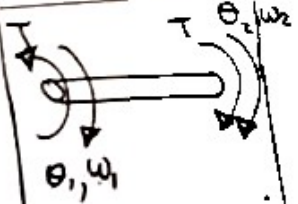
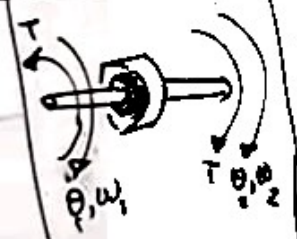



fricción viscosa Newtoniana      Realidad



FEN. MECANICOS de ROTACION

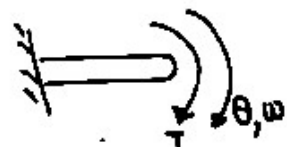
$T, \omega$   
 $T, \theta$

Nombre	Param.	Simbolo	Leg
INERCIA (momento de inercia)	J	$T, \omega$ 	$J \frac{d\omega}{dt} = T$ $J \ddot{\theta} = T$
ELASTICIDAD (Resorte de Torsion)	K		$\frac{dT}{dt} = K(\omega_2 - \omega_1)$ $T = K(\theta_2 - \theta_1)$
FRICCIÓN	B	 	$T = B(\omega_2 - \omega_1)$ $T = B(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)$ $T = B\dot{\theta}$

Reglas de conjunto:

$$\sum_{\text{nodos}} F_i = 0$$

$$\sum_{\text{matrices}} x_{ij} = 0$$

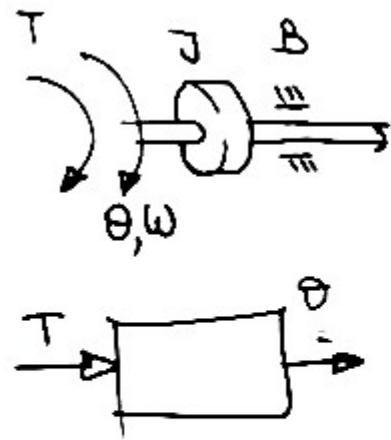


$$T = K\theta$$



$$T = B\omega$$





$$J\ddot{\theta} = (T - B\ddot{\theta})$$

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{J}T - \frac{B}{J}\ddot{\theta}$$

$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{B}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J} \end{bmatrix} T$$