Curso

SISTEMAS Y CONTROL

Clase 07

Fotogramas de los pizarrones de clases filmadas

Prof. Rafael Canetti

Instituto de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería, Universidad de la República
Montevideo, Uruguay.
Año 2020

REPRESENTACIÓN F de S

$$\begin{cases} y_{[t_0,t]} = F\left[x_0, u_{[t_0,t]}\right] & x_0 \in X \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

$$x(t) = \varphi(x_0, t_0, u_{[t_0,t)}, t)$$

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

LINEALIDAD

Sea el sist. U, Y, S con est. X

U, Y, X ev. sobre un mismo K

$\forall \begin{cases} u_1, u_2 \in U \\ k \in K \\ x_{1_0}, x_{2_0} \in X \end{cases} \Longrightarrow \underbrace{F\left[k(x_{1_0}+x_{2_0}), k(u_1+u_2)_{[t_0,t]}\right]}_{y_{[t_0,t]}} = k\underbrace{F\left[x_{1_0}, u_1\right]}_{y^1_{[t_0,t]}} + k\underbrace{F\left[x_{0_2}, u_2\right]}_{y^2_{[t_0,t]}}$

$F[x_0, u] = \underbrace{F[x_0, \underline{0}]}_{\text{resp. libre}} + \underbrace{F[\underline{0}, u]}_{\text{resp. forzada}}$

$F[x_{1_0}+x_{0_2}, \underline{0}] = F[x_{1_0}, \underline{0}] + F[x_{2_0}, \underline{0}]$

$F[\underline{0}, u_1+u_2] = F[\underline{0}, u_1] + F[\underline{0}, u_2]$

[redacted]ODELOS

Sistemas dinámicos de Parám. concentrados

T. continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \\ y(t) = g(x(t), u(t), t) \end{cases}$$

con: $\begin{cases} x(t) \in \mathbb{R}^n \\ u(t) \in \mathbb{R}^r \\ y(t) \in \mathbb{R}^m \end{cases}$, $x(t_0) = x_0$ (conocida)

$u(t)$ conocida $\forall t \geq t_0$

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix} \quad y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

S.D.P.C lineal

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) \\ y(t) = C(t)\,x(t) + D(t)\,u(t) \end{cases}$$

S.D.P.C.L.IT

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) = C\,x(t) + D\,u(t) \end{cases}$$

T. discreto.

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_D(x_k, u_k, k) \\ y_k = g_D(x_k, u_k, k) \end{cases}$$

con $\begin{cases} x_k \in \mathbb{R}^n \\ u_k \in \mathbb{R}^r \\ y_k \in \mathbb{R}^m \end{cases}$

S.D.P.C. Lineal

$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi_k\, x_k + \Gamma_k\, u_k \\ y_k = C_k\, x_k + D_k\, u_k \end{cases}$$

S.D.P.C.L.IT

$$\begin{cases} x_{k+1} = \Phi\, x_k + \Gamma\, u_k \\ y_k = C\, x_k + D\, u_k \end{cases}$$

1) Todo fen. que pueda ser representado por una ec. dif. ord. a coef. ctes. de la forma

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u(t) \Rightarrow y^{(n)}(t) = -a_1 y^{(n-1)}(t) - a_2 y^{(n-2)}(t) \dots + b_0 u(t)$$

admite una rep. en v.e. D.L.P.C.I.T. de la forma III

def. $$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\mathring{x}(t) = \begin{bmatrix} y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \\ y^{(n)}(t) \end{bmatrix}}_{\mathring{x}(t)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \dots & & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ y''(t) \\ \vdots \\ y^{(n-2)}(t) \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u(t)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mathring{x}(t) &= A\,x(t) + B\,u(t) \\ y(t) &= C\,x(t) + D\,u(t) \end{aligned}$$

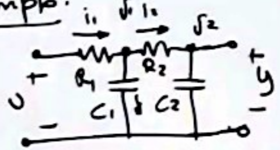
Modelado de fenómenos físico-químicos...
- Sistemas eléctricos

nombre	parám	símbolo	Ley
Resistencia	R	$+ \; v \; - \downarrow i$	$v = R \cdot i$
Capacidad	C	$+ \; v \; - \; i$	$i = C\dfrac{dv}{dt}$
inductancia	L	$+ \; v \; - \; i$	$v = L\dfrac{di}{dt}$

variables: i, v

Leyes de conjunto: $\begin{cases} \sum_{nodo} i_j = 0 \\ \sum_{malla} v_{jk} = 0 \end{cases}$

Ejemplo:



$$i_1 = -\frac{v_1 - u}{R_1} = \frac{u - v_1}{R_1}$$

$$i_2 = -\frac{y - v_1}{R_2} = \frac{v_1 - y}{R_2}$$

$$(i_1 - i_2) = C_1\frac{dv_1}{dt}$$

$$i_2 = C_2\frac{dy}{dt}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

$$C_1\frac{dv_1}{dt} = (i_1 - i_2) = \frac{u}{R_1} - \frac{v_1}{R_1} - \frac{v_1}{R_2} + \frac{y}{R_2}$$

$$C_2\frac{dy}{dt} = i_2 = \frac{v_1}{R_2} - \frac{y}{R_2}$$

$$\underbrace{\dot{x}(t)}_{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{v}_1(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) & \frac{1}{C_1 R_2} \\ \frac{1}{C_2 R_2} & -\frac{1}{C_2 R_2} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{u(t)}_{u}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\begin{bmatrix} v_1(t) \\ y(t) \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{u(t)}_{u}$$